Useful Mathematical & Physical Formulae

作者简介

沃特金斯

(Matthew Watkins)

英国音乐家和科学家。在完成一项英国皇家学会(Royal Society)赞助的研究计划后，他买了一头驴子，远离尘嚣，现在过着近乎游牧民族的逍遥生活。

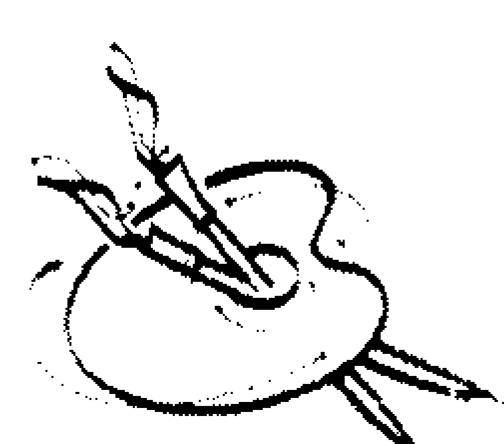
Useful Mathematical & Physical Formulae

绘者简介

特威德

(Matt Tweed)

英国音乐家和制作人。长年与他的乐团“太空山羊(Space Goats)”，共同游历世界各地。



序

这本小册子是想以平易近人且便于使用的方式，把常用的数学与物理基本公式介绍给大家. 至于比较陌生的名词与符号，则在书末附录的词汇里说明.

利用数字和符号来模拟现实、并加以预测与控制，是很有魔力的，好像在变法术一样. 不幸的是，拥有这些能力不一定会带来足够的智慧与远见，因此，我们发现了危险性技术的发展激增，也看到很多人对数量的迷恋，其中最具代表性的，是几乎所有的事情都屈服于全球经济之下（这里倒没有收录计算高利贷的公式），书里的内容，读者要小心使用.

另外一方面，数学工具在很多领域里好像都有共通性，例如，我们以前曾认为光与电是不同的，但在现今电磁场的理论里，它们是一体的两面.

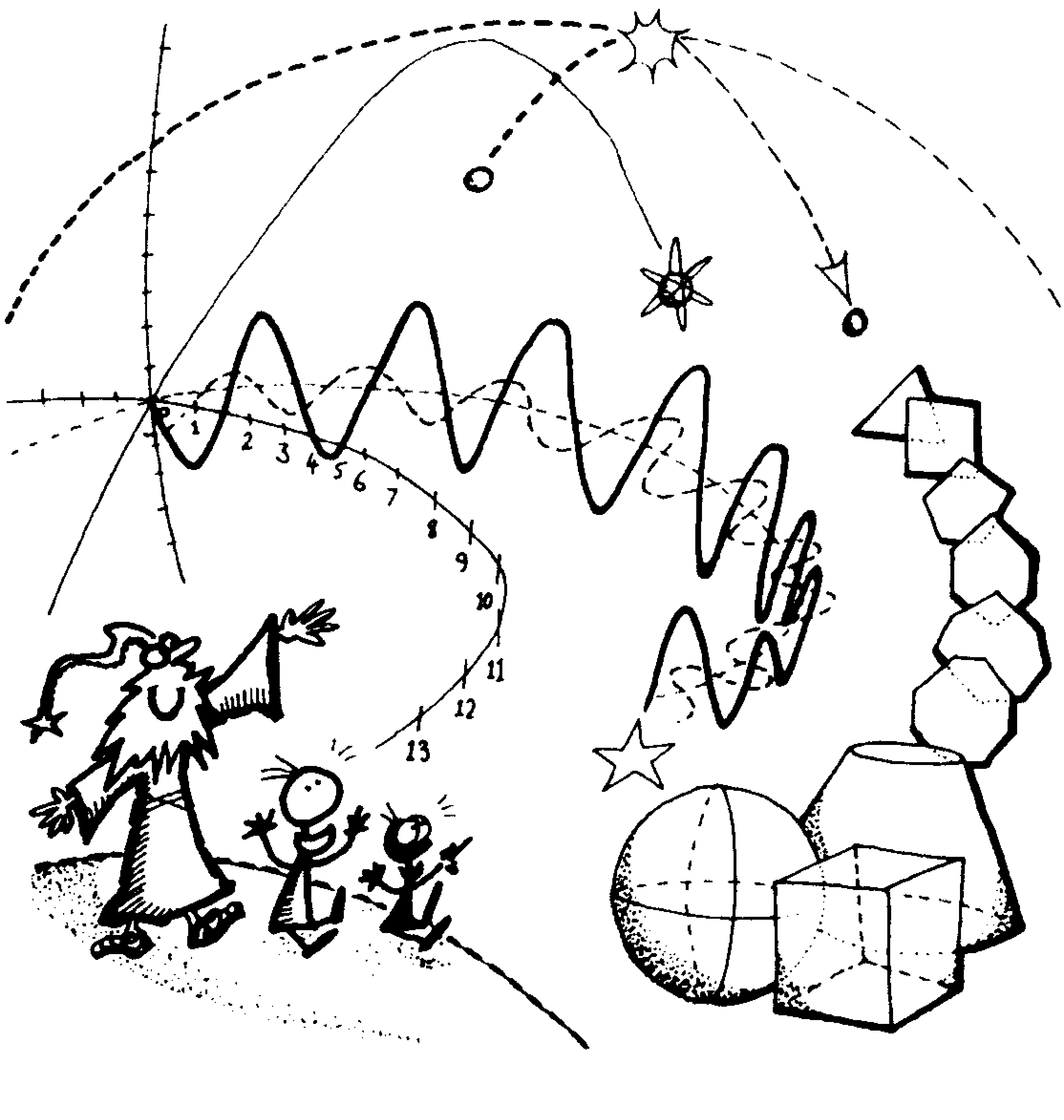
爱因斯坦著名的（或许也是所有公式中最最知名的）公式$E=mc^2$，可能是这种“双刃剑”的最佳例证：一方面它将永远是核武器的源头，却也是质量与能量统一的科学发现.

但愿大家的喜悦与好奇心永不熄灭.

——沃特金斯，于2001年

目录

这些优雅的公式是探索科学和艺术的基石，
虽历经世世代代，仍叫人着魔。



三角形

直角三角形永远满足勾股定理：斜边（直角的对边）的平方，等于两直角边的平方和，即（右页上方左图）

$$a^2+b^2=c^2 \qquad 或 \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

任何三角形的三个内角和是180°或 π 弧度.

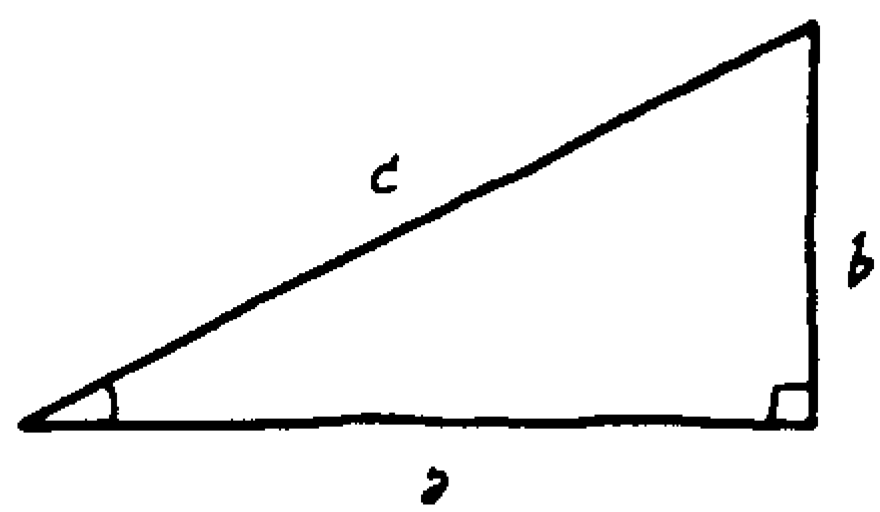
三角形的周长：$p=a+b+c$.

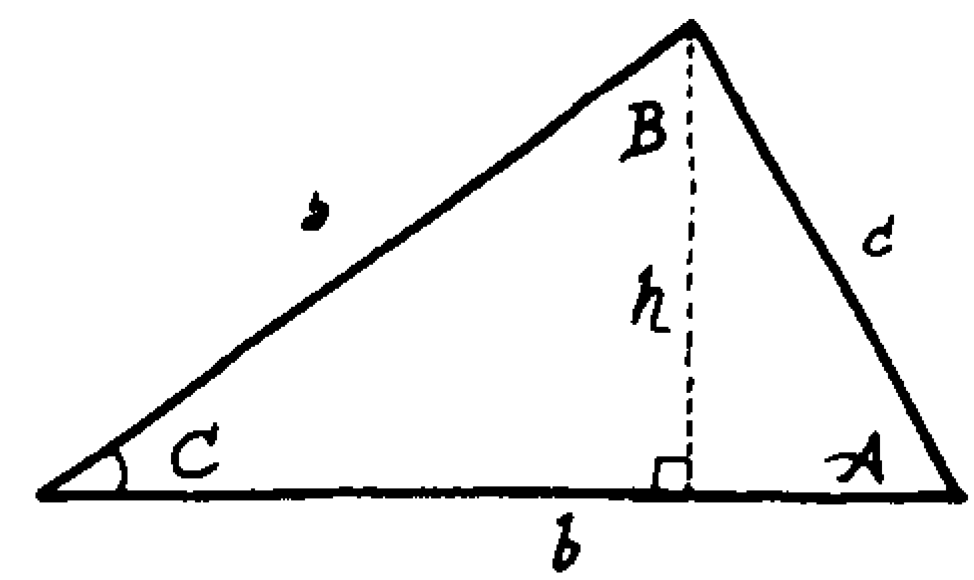
三角形的面积：$S=\frac{1}{2}bh$

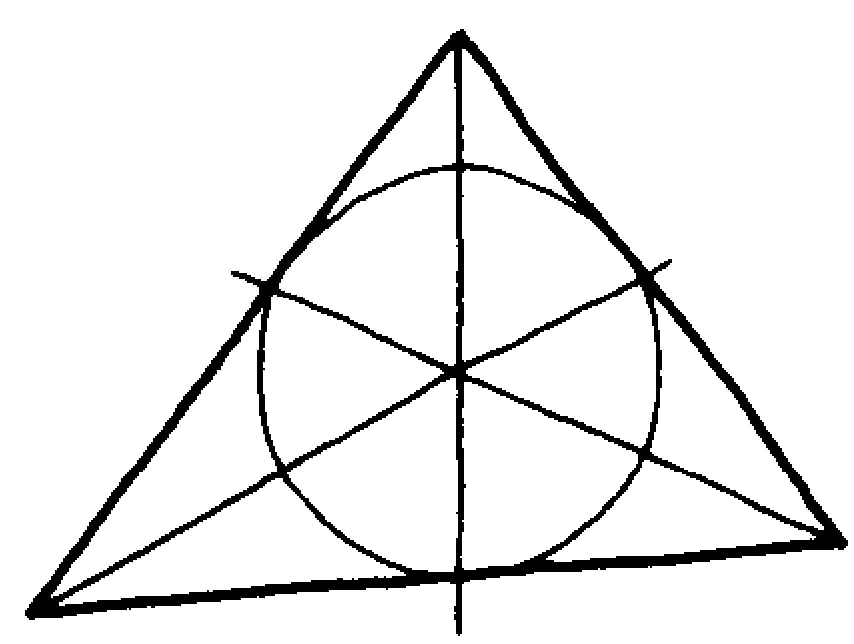
$=\frac{1}{2}ab\sin C$ （见右页上方右图）.

正弦定律：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$

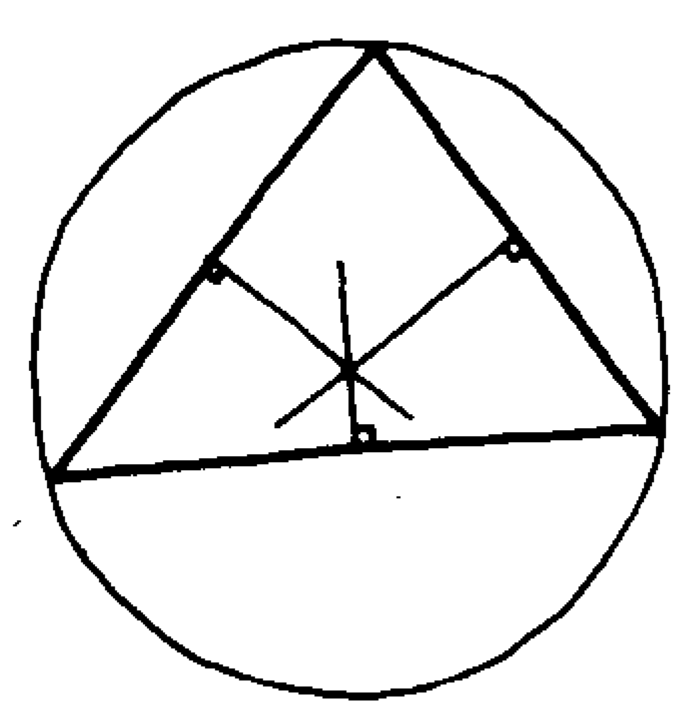
（r 是三角形外接圆的半径）.







三条角平分线相交于内切圆的圆心（内心）



三边的中垂线相交于外接圆的圆心（外心）

中线是顶点与对边中点的连线.

三条中线相交的点是形心（centroid），

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

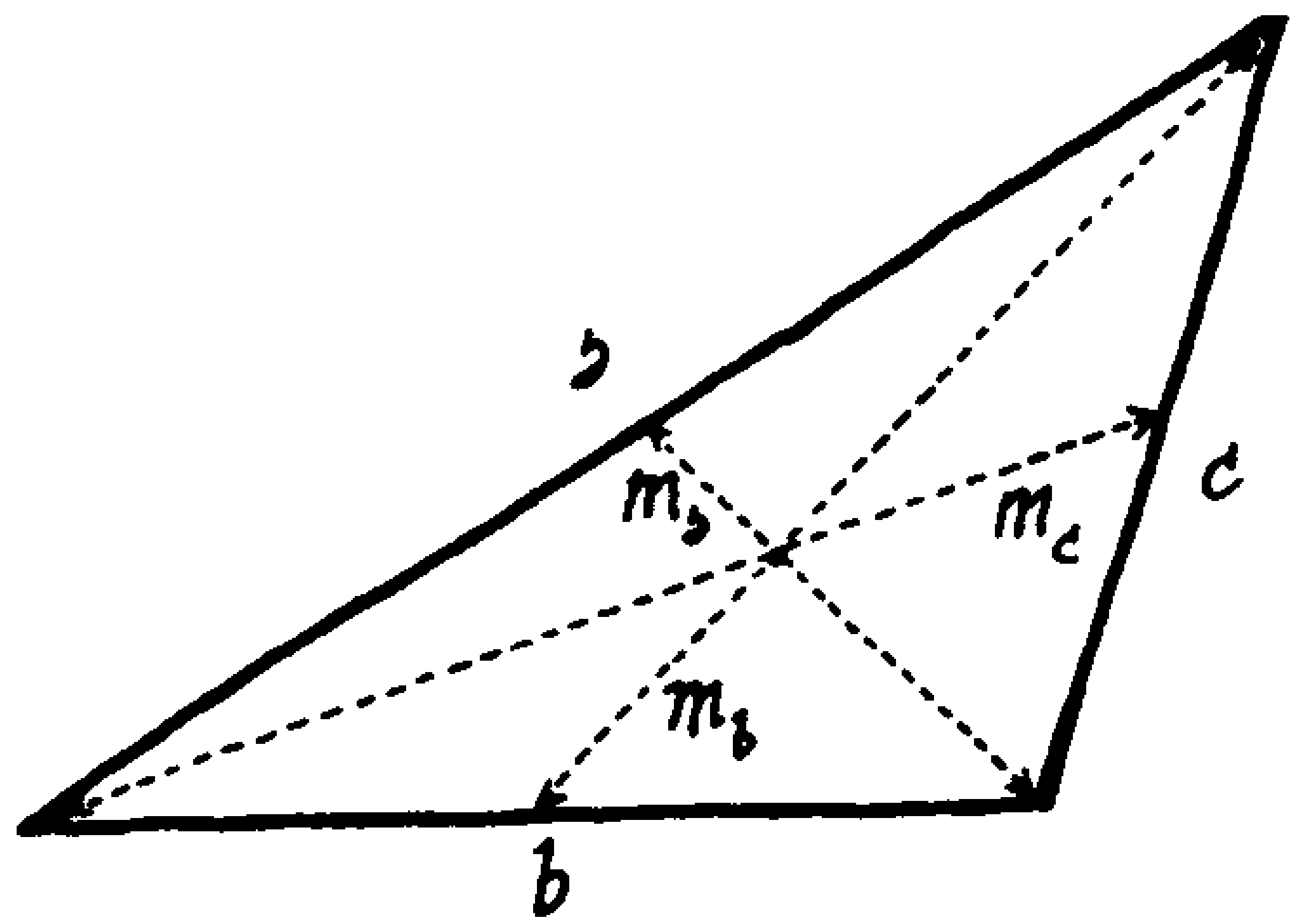
高是从顶点画到对边（或对边的延长线）的线段，且与对边互相垂直，

$$h_a=\frac{2S}{a},$$

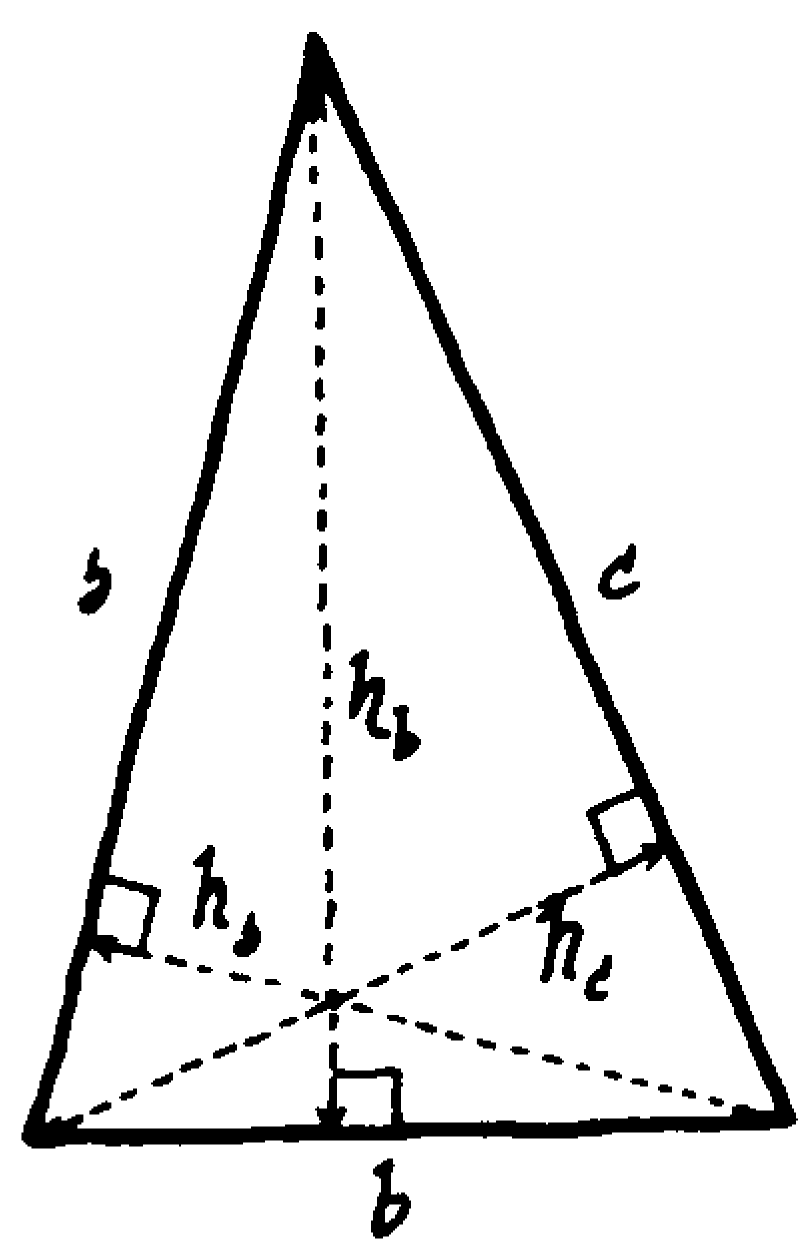
$$h_b=\frac{2S}{b},$$

$$h_c=\frac{2S}{c},$$

三边的高交于垂心（orthocenter）.



三条中线相交于形心



三边的高相交于垂心

二维图形

下面是一些二维图形的周长与面积公式.

圆：

半径 $=r$，直径 $d=2r$，

圆周长 $=2\pi r=\pi d$，

面积 $=\pi r^2$ （$\pi=3.1415926\cdots$）.

椭圆：

面积 $=\pi ab$，

a 与 b 分别代表短轴与长轴的一半，右图中的两个点是焦点，$l+m$ 是个常数（constant）.

矩形：

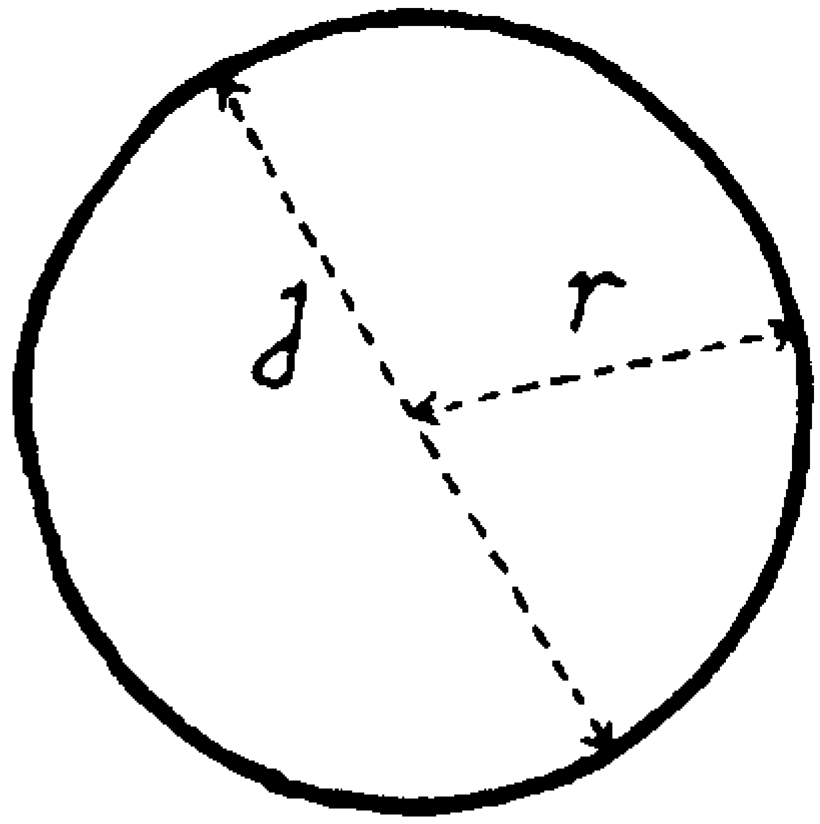
面积 $=ab$，

周长 $=2a+2b$.

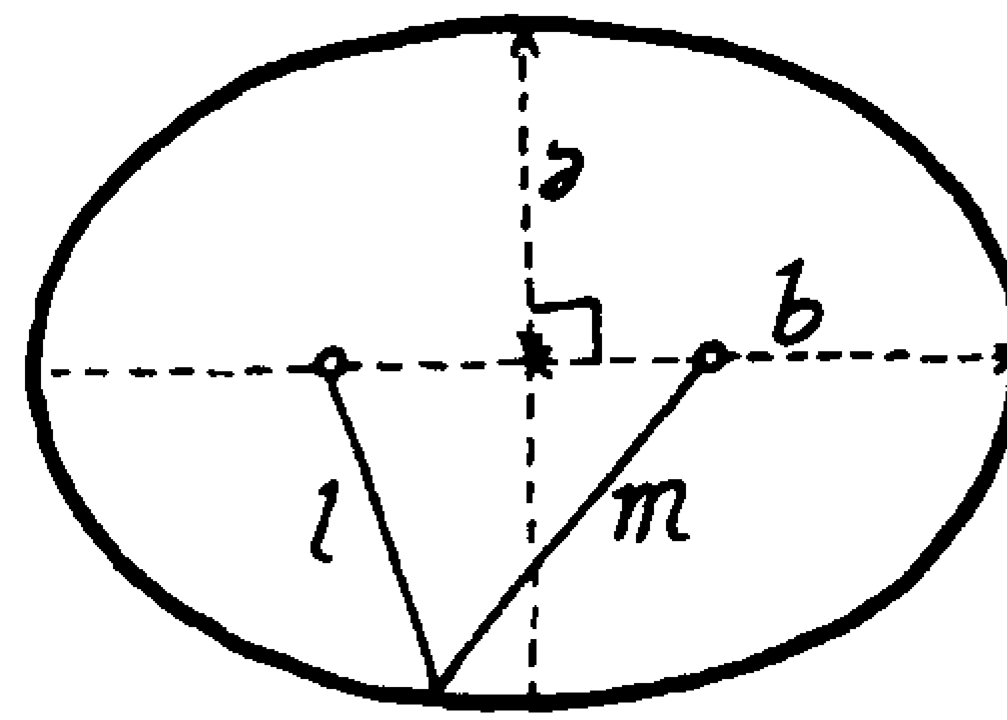
平行四边形（parallelogram）：

面积 $=bh=ab\sin\alpha$，

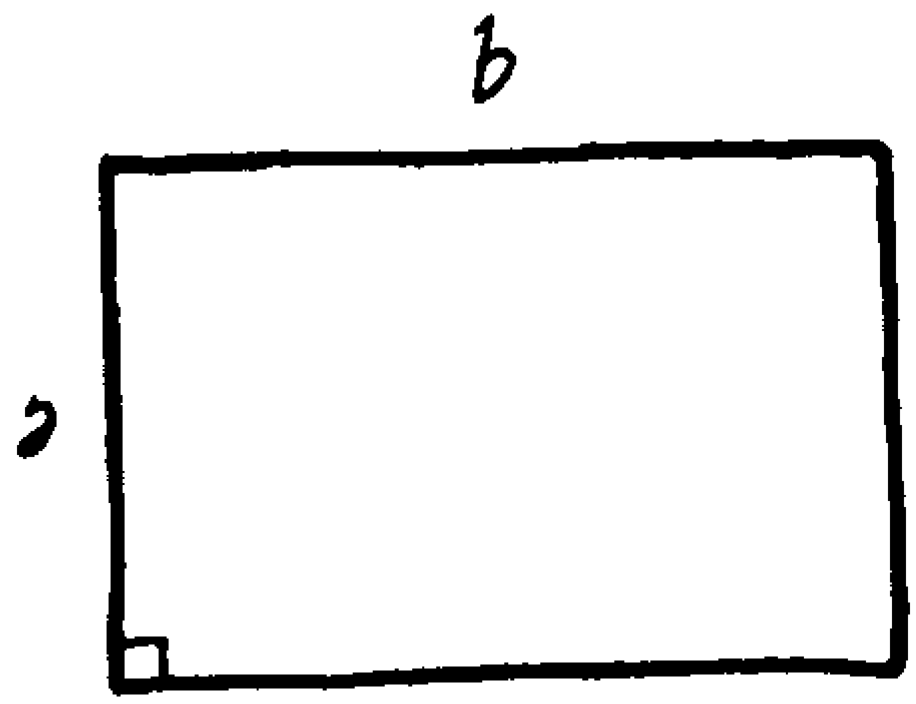
周长 $=2a+2b$.



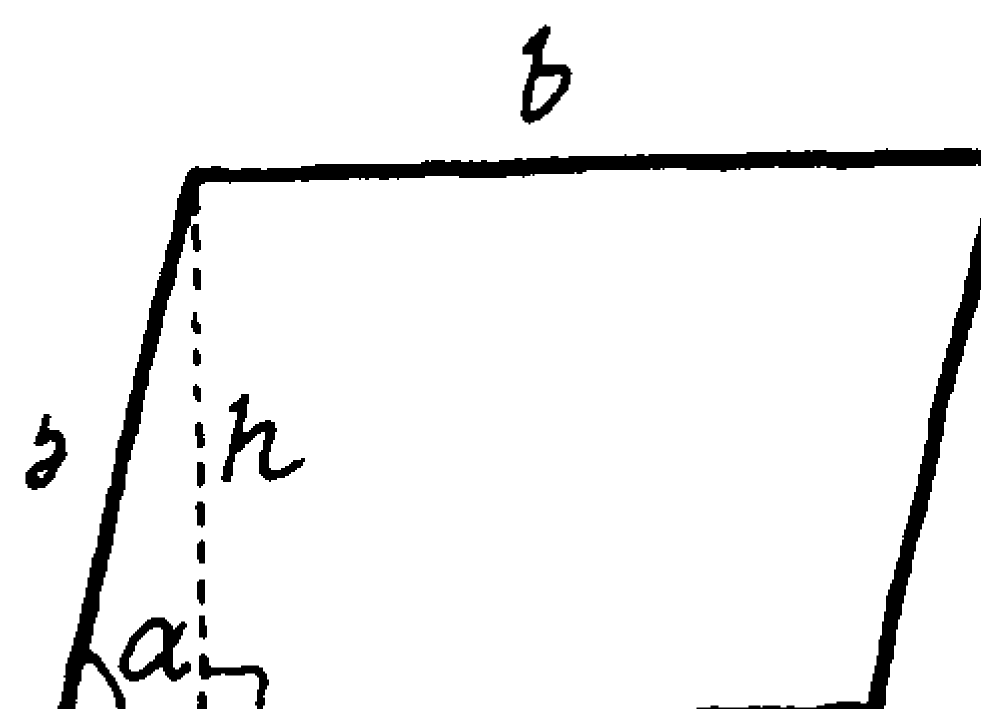
圆形



椭圆形



矩形



平行四边形

梯形：

$$面积=\frac{1}{2}h(a+b),$$

$$周长=a+b+h(\csc\alpha+\csc\beta).$$

正 n 边形：

$$面积=\frac{1}{4}nb^2\cot(180°/n),$$

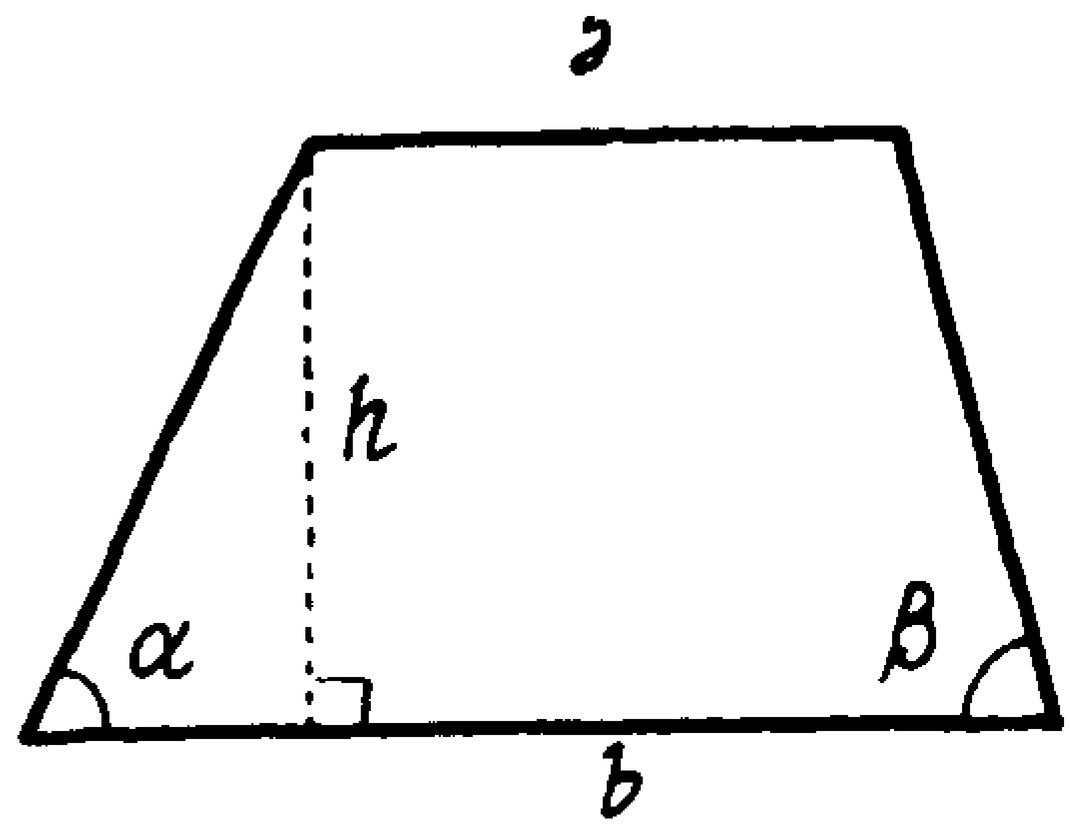
$$周长=nb.$$

四边形（i）：

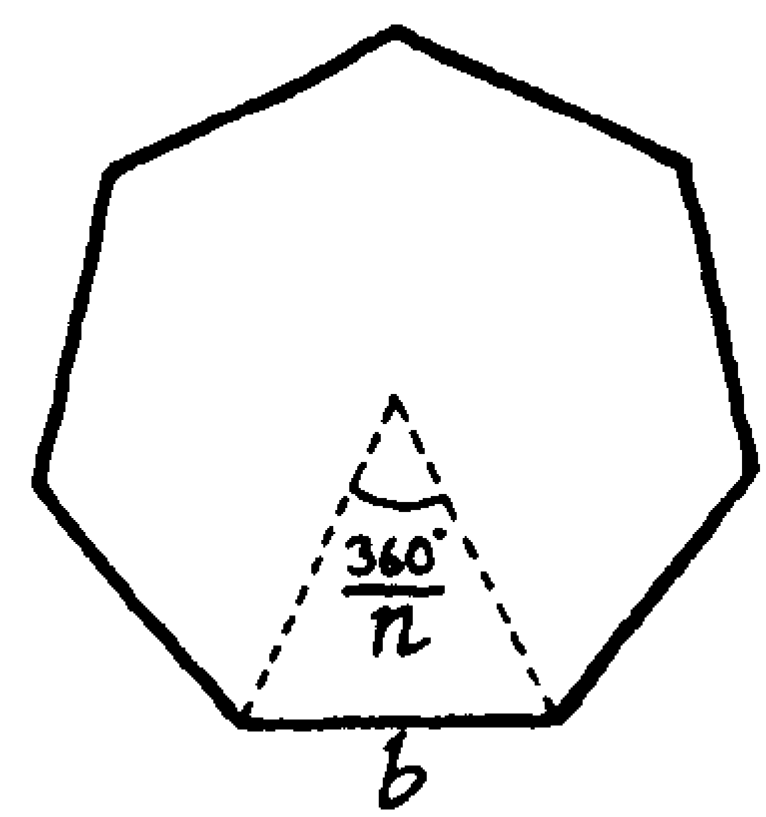
$$面积=\frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

四边形（ii）：

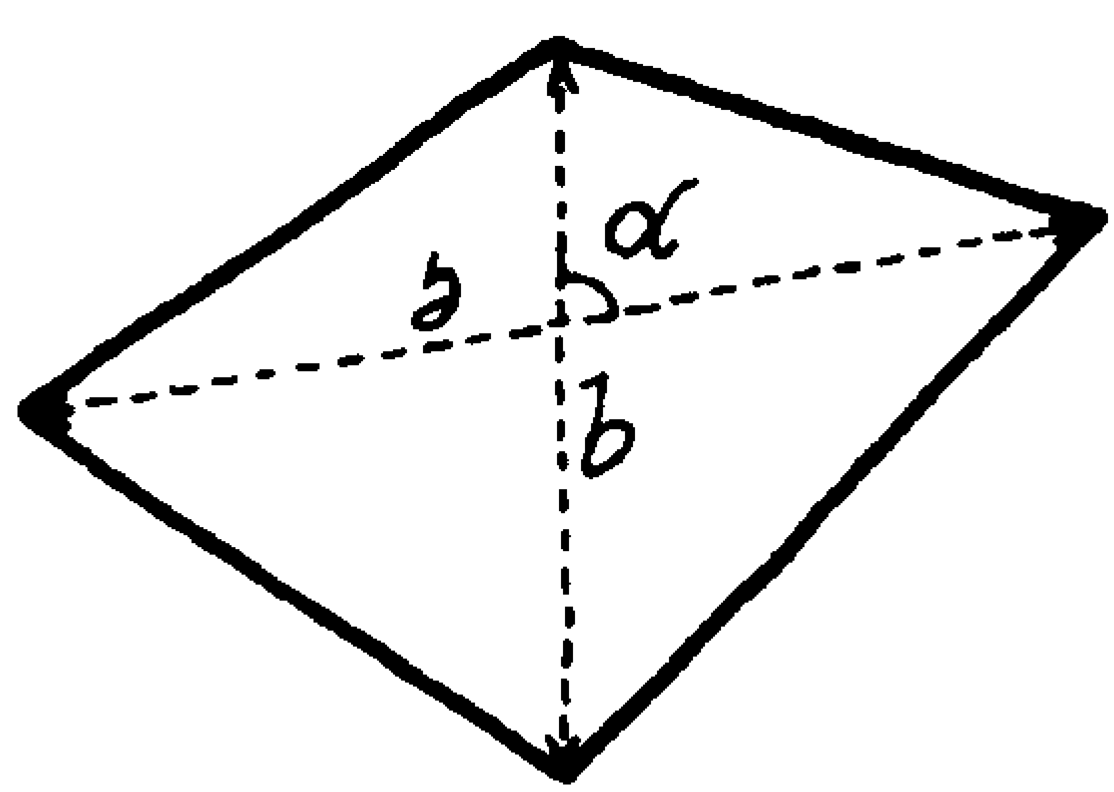
$$面积=\frac{1}{2}(h_1+h_2)b+\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ch_2.$$



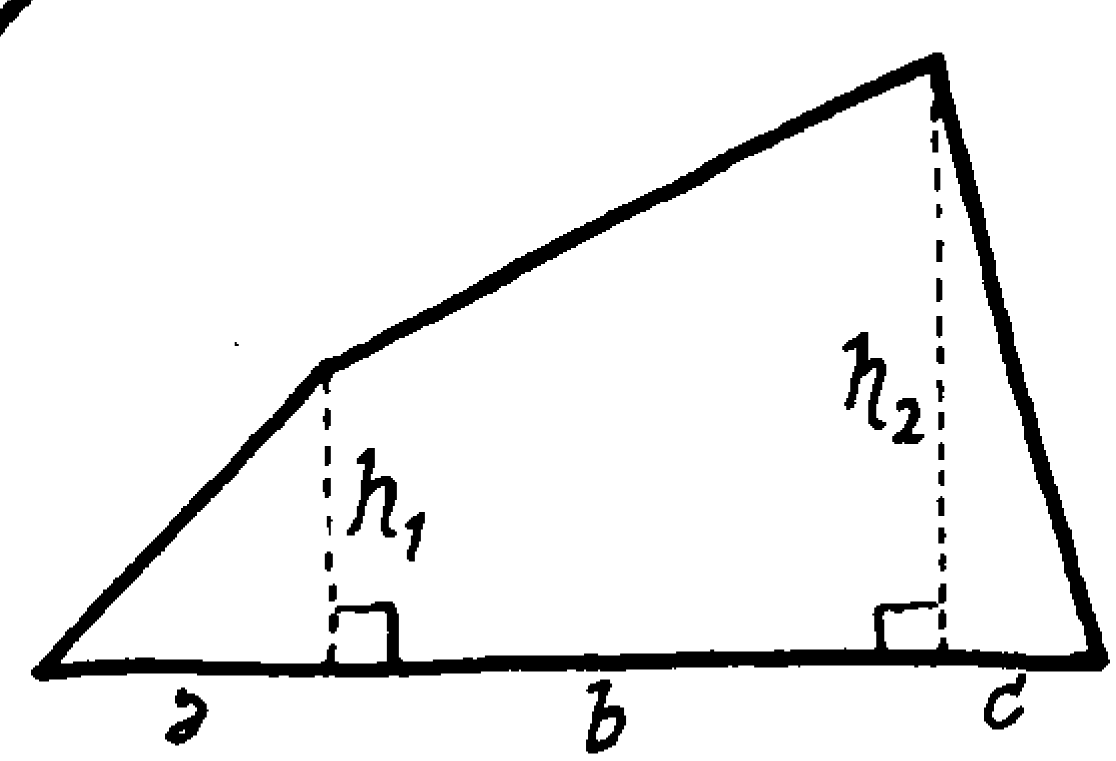
梯形



正 *n* 边形



四边形（i）



四边形（ii）

三维图形

以下是三维立体的体积与表面积（包含底部）的计算公式.

球体:

体积 $=\frac{4}{3}\pi r^3$,

表面积 $=4\pi r^2$.

长方体:

体积 $=abc$,

表面积 $=2(ab+ac+bc)$.

圆柱体:

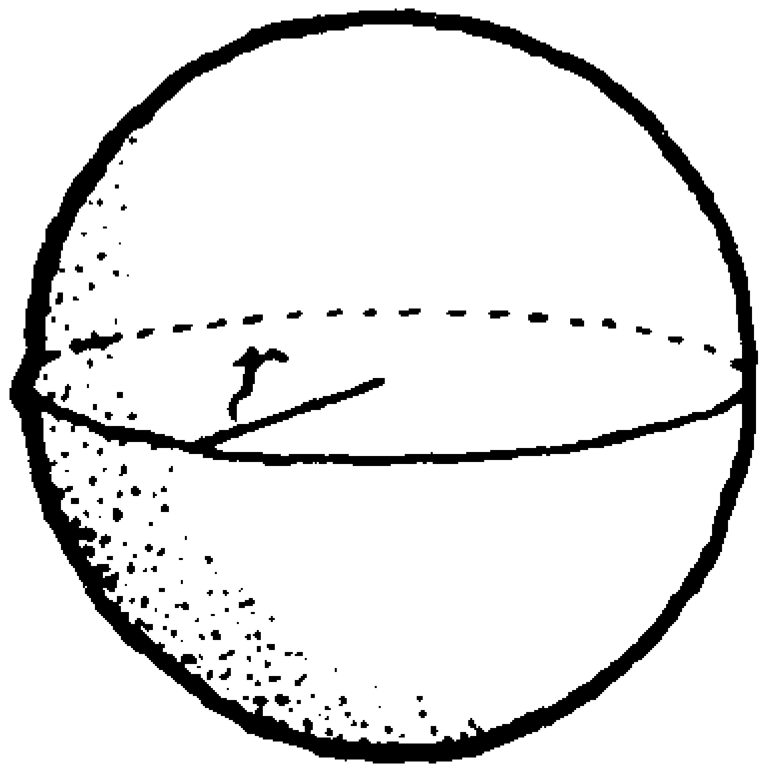
体积 $=\pi r^2 h$,

表面积 $=2\pi rh+2\pi r^2$.

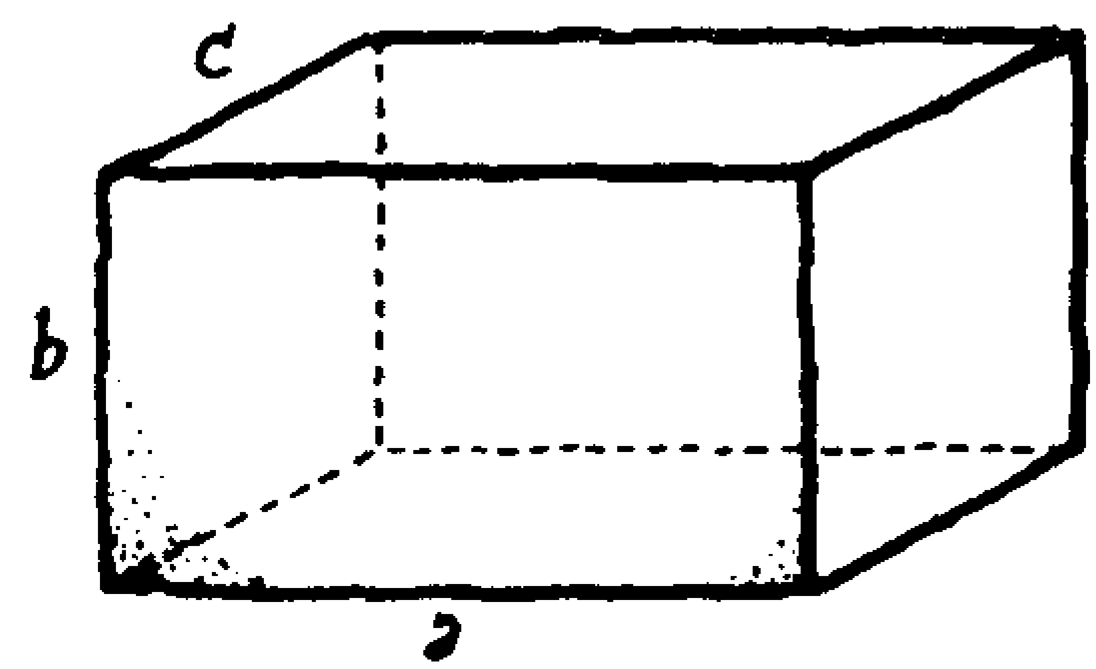
圆锥体:

体积 $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$,

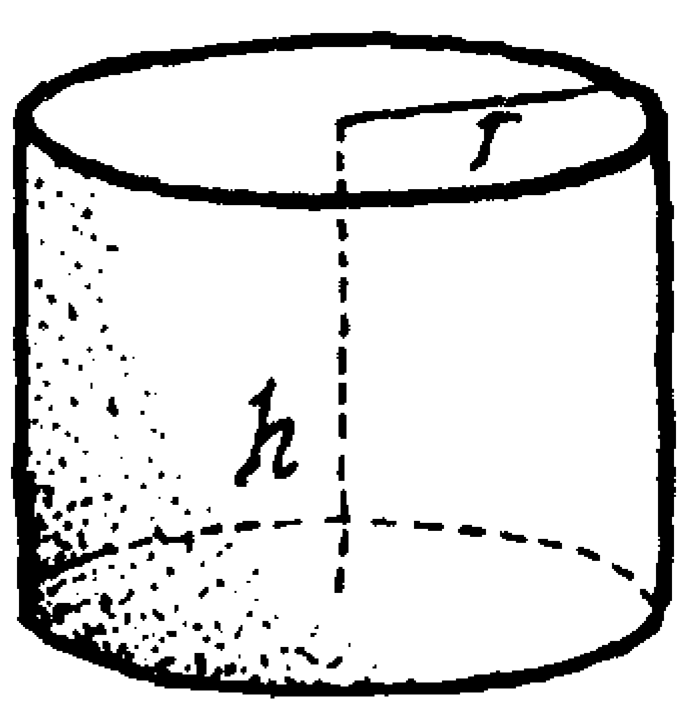
表面积 $=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$.



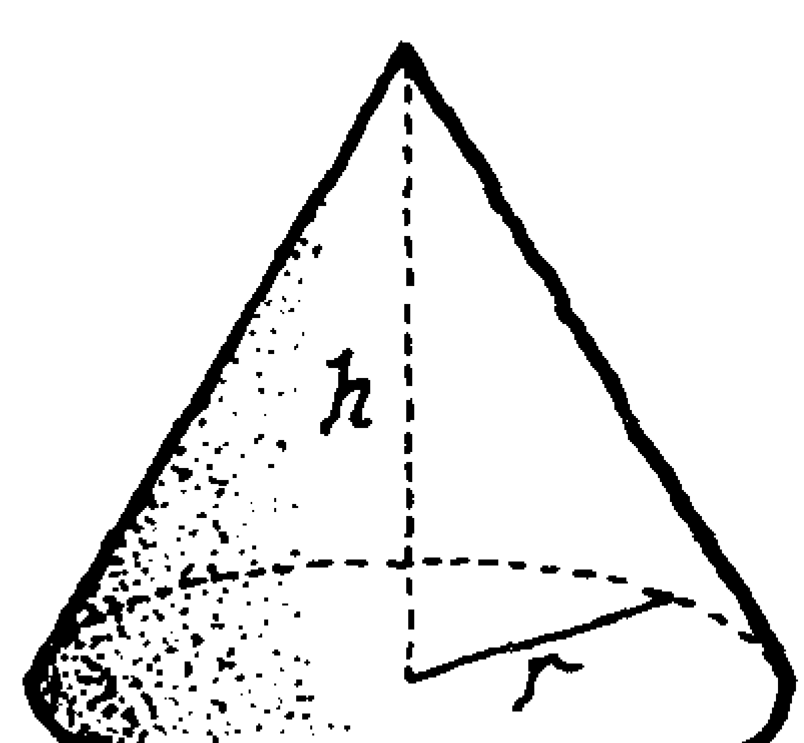
球体



长方体（矩形平行六面体）



圆柱体



圆锥体

棱锥体：

若底面积为A，则

体积$=\frac{1}{3}Ah$.

圆锥的平截头台（frustum）：

体积$=\frac{1}{3}\pi h(a^2+ab+b^2)$，

表面积$=\pi(a+b)c+\pi a^2+\pi b^2$.

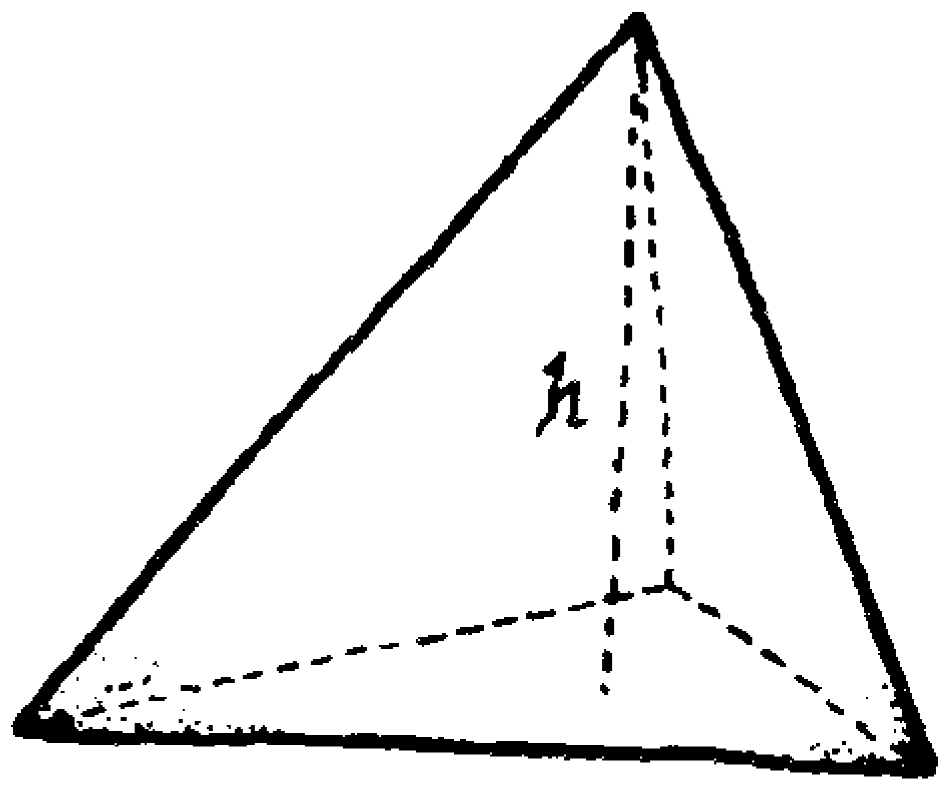
椭球：

体积$=\frac{4}{3}\pi abc$.

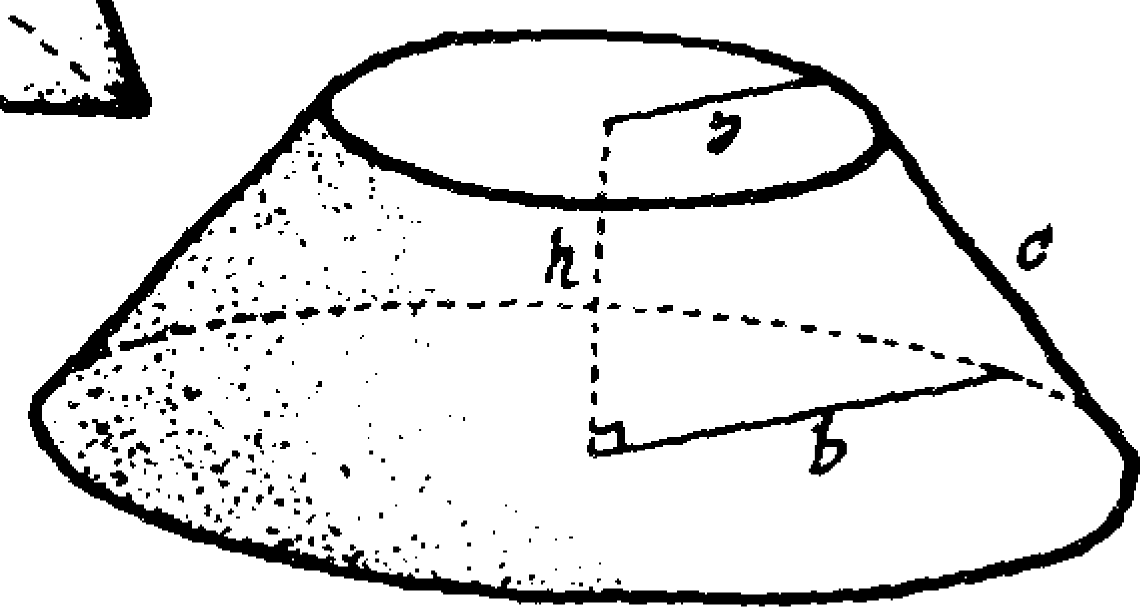
环面（torus）：

体积$=\frac{1}{4}\pi^2(a+b)(b-a)^2$，

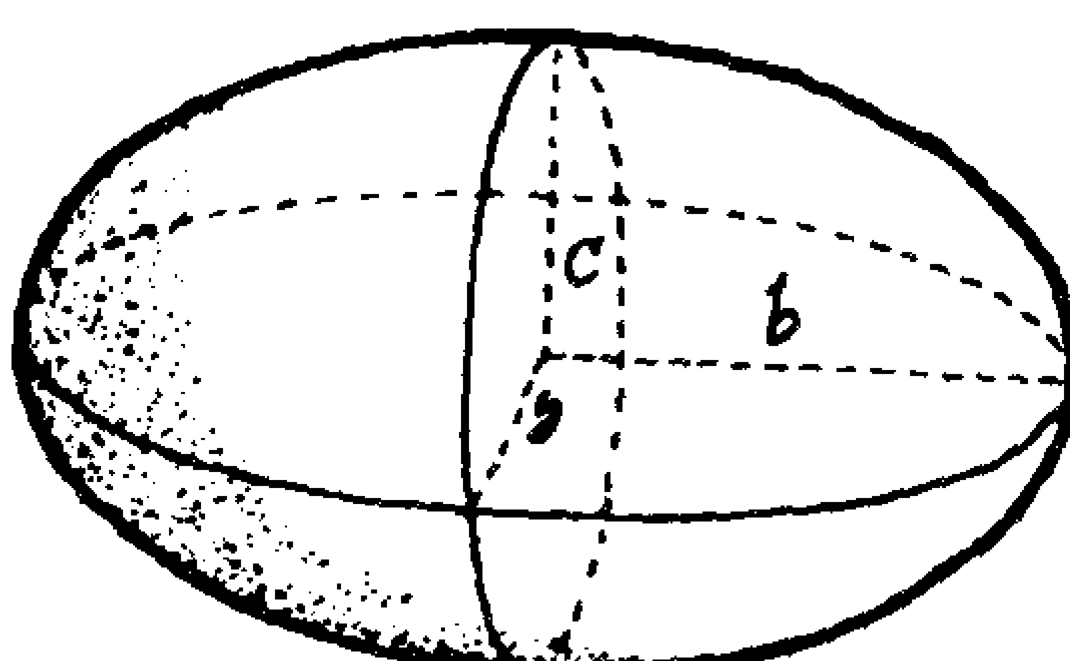
表面积$=\pi^2(b^2-a^2)$.



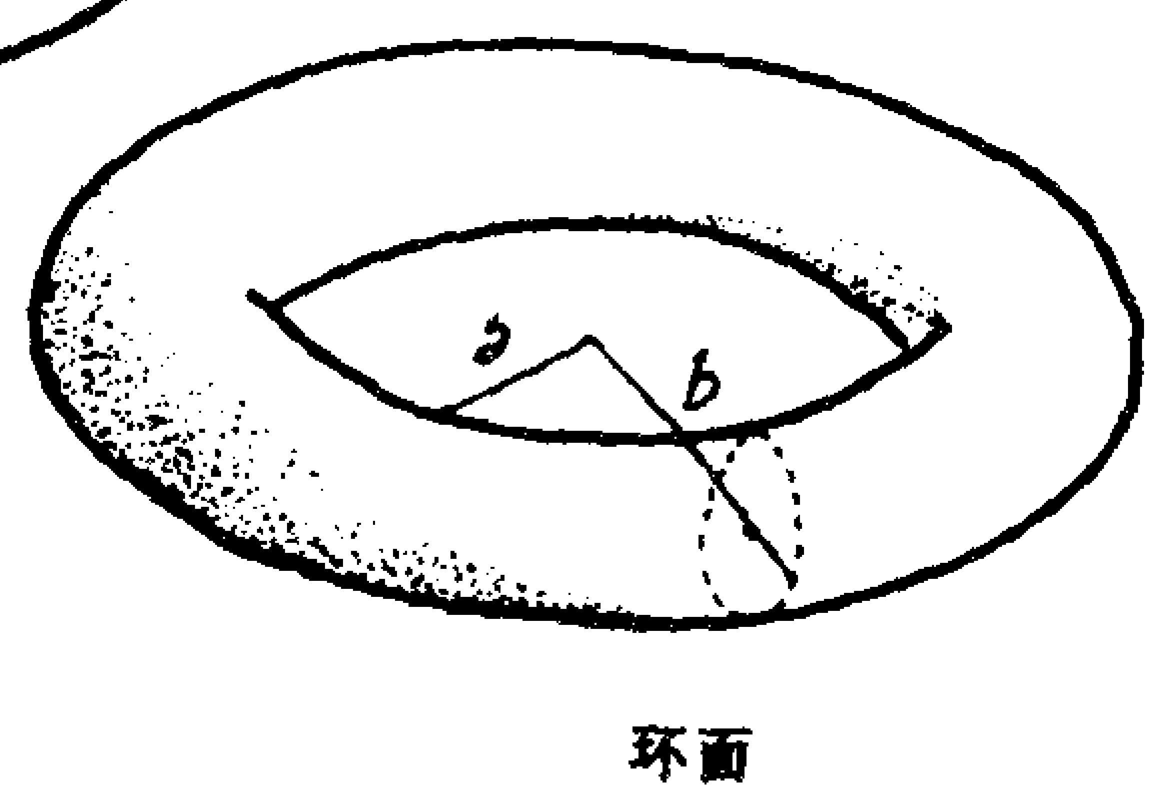
棱锥体



圆锥的平截头台（截平了的圆锥体）



椭球



环面

解析几何

一对垂直相交于平面的轴线，可以让平面上的任意一点用一组实数来表示．轴线的交点是（0，0），称为原点．水平与垂直方向的位置，分别用 x 与 y 代表．

一条直线可以用方程式 $y=mx+c$ 来表示，m 是直线的斜率（gradient）．此直线与 y 轴相交于（0，c），与 x 轴则相交于$\left(-\frac{c}{m},0\right)$．垂直线的方程式则是 $x=k$，x 为定值．

通过（x_0，y_0）这一点，且斜率为 n 的直线是

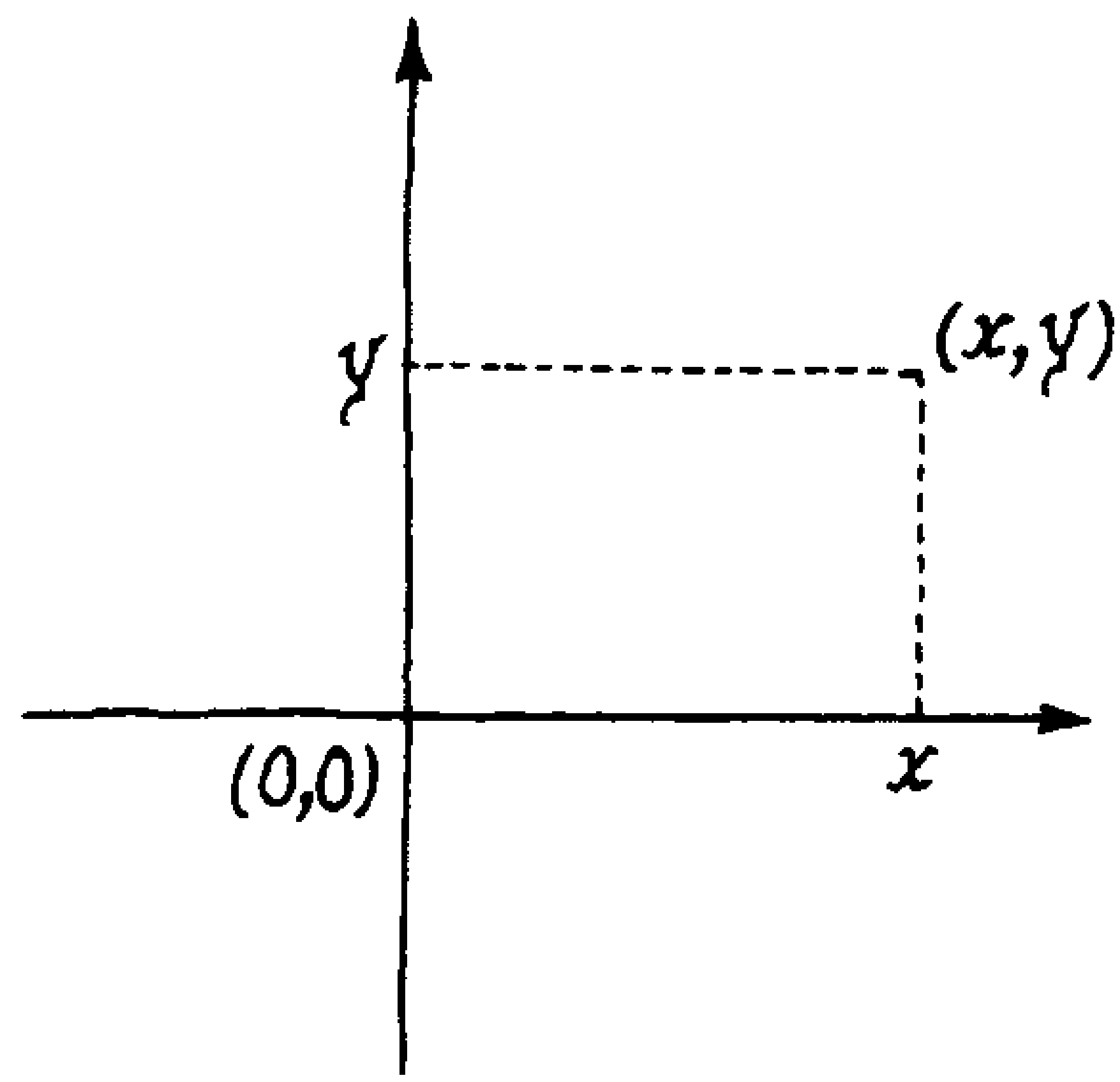
$$y-y_0=n(x-x_0).$$

一条直线若垂直于斜率为 n 的直线，则其斜率为 $-\frac{1}{n}$．通过（x_1，y_1）与（x_2，y_2）两点的直线是

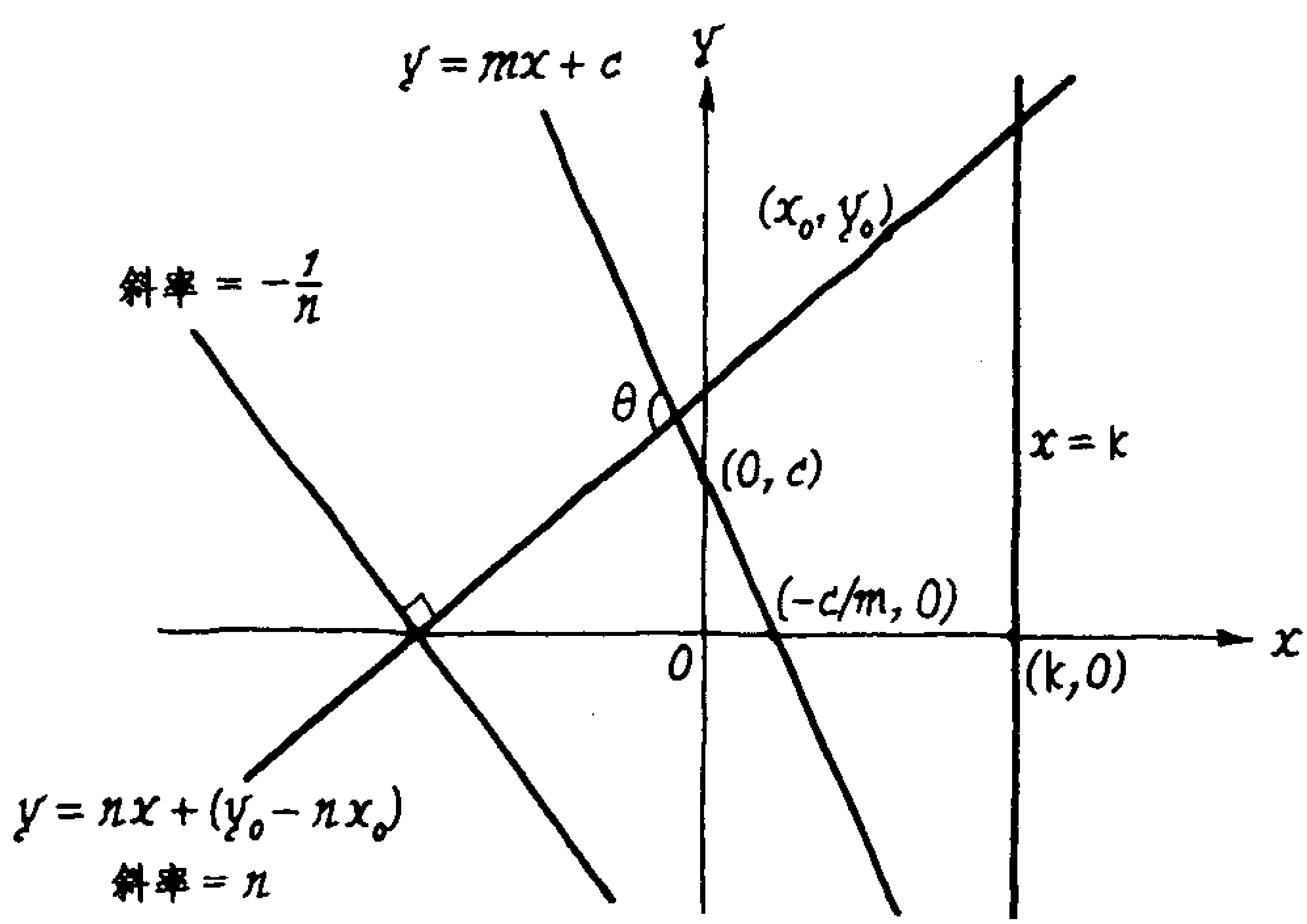
$$y=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_2)+y_2,x_1\neq x_2.$$

若两直线的斜率分别为 m 与 n，则它们的夹角 θ 满足于

$$\tan\theta=\frac{m-n}{1+mn}.$$



y
(x,y)
(0,0)
x

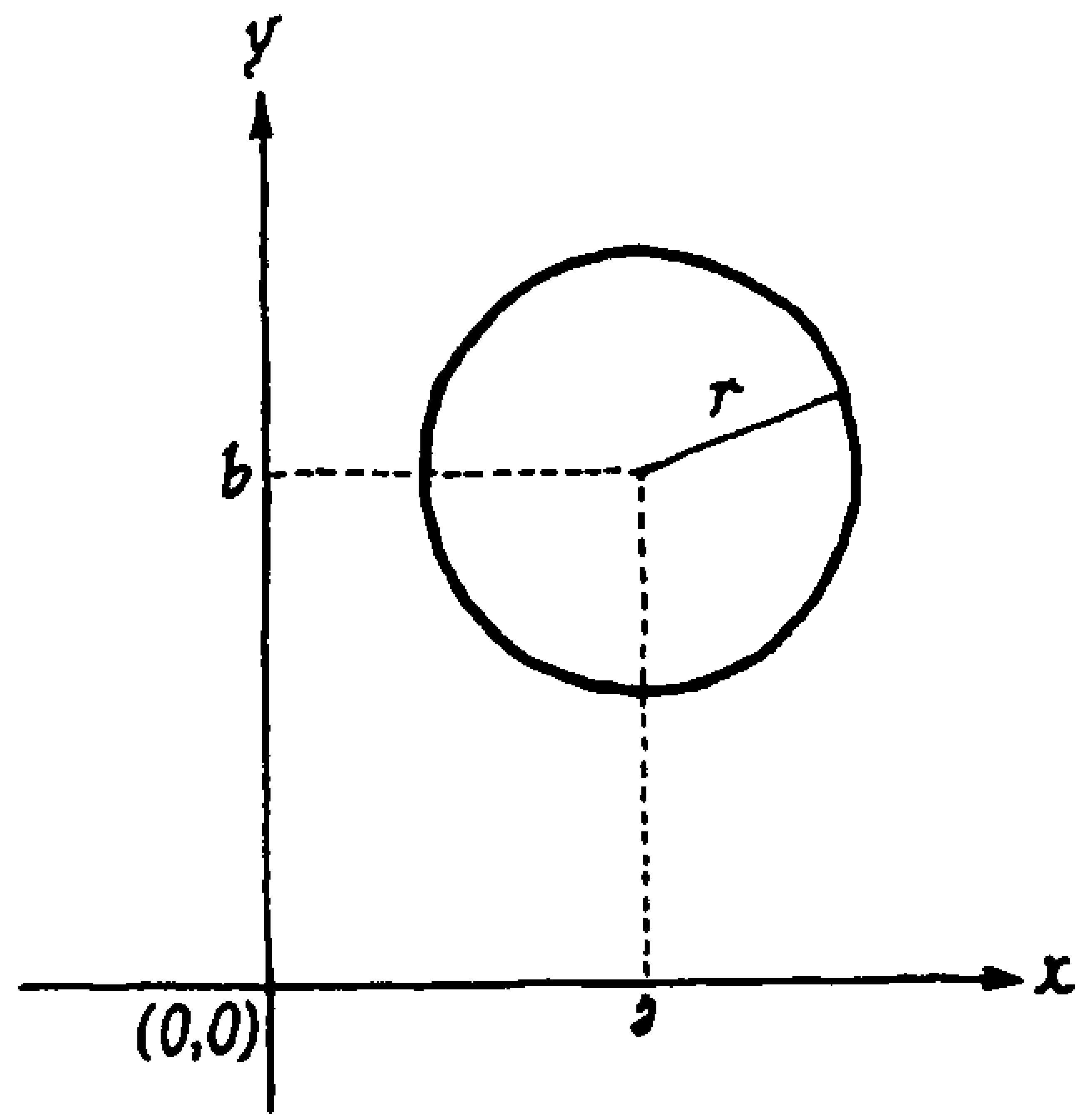


y = mx + c
y
(x0, y0)
斜率 = −1/n
θ
(0, c)
x = k
(−c/m, 0)
0
(k,0)
x
y = nx + (y0 − nx0)
斜率 = n

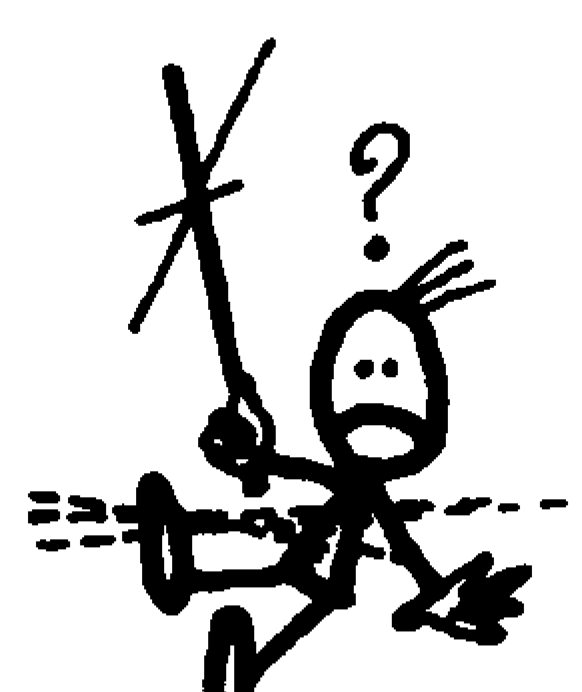
半径为r、圆心在（a，b）的圆，以$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$表示。

三维空间里的坐标与二维空间类似，只是多加一个z轴而已，例如半径为r、中心位置在（a，b，c）的球，以$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$表示。

三维空间平面的一般式为$ax+by+cz=d$。



圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



直角三角学

右页上图是个边长为 a、b、c 的直角三角形，其中一个夹角为 θ． 它的 6 个三角函数分别为：正弦（sine）、余弦（cosine）、正切（tangent）、余割（cosecant）、正割（secant）和余切（cotangent）．

$$\sin\theta=\frac{b}{c},\ \cos\theta=\frac{a}{c},\ \tan\theta=\frac{b}{a},$$

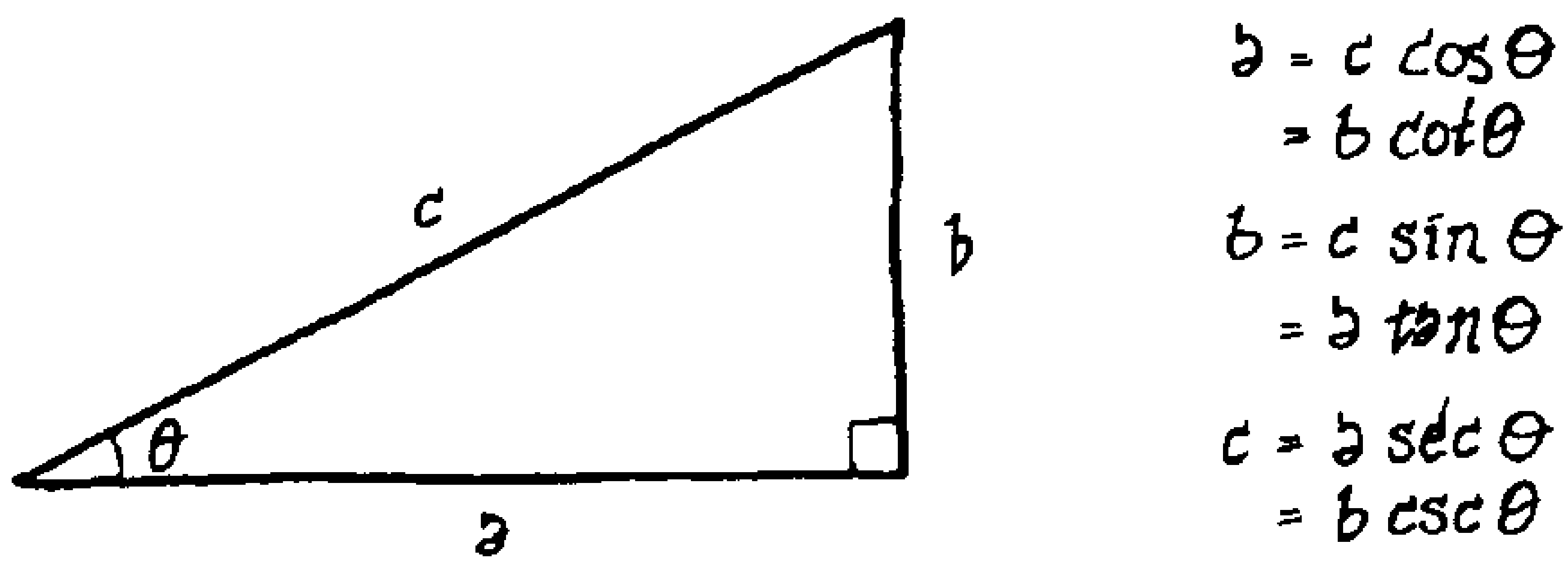
$$\csc\theta=\frac{c}{b},\ \sec\theta=\frac{c}{a},\ \cot\theta=\frac{a}{b}.$$

见右页下图，若圆的半径是 1，则其正弦与余弦分别为直角三角形的高与底.

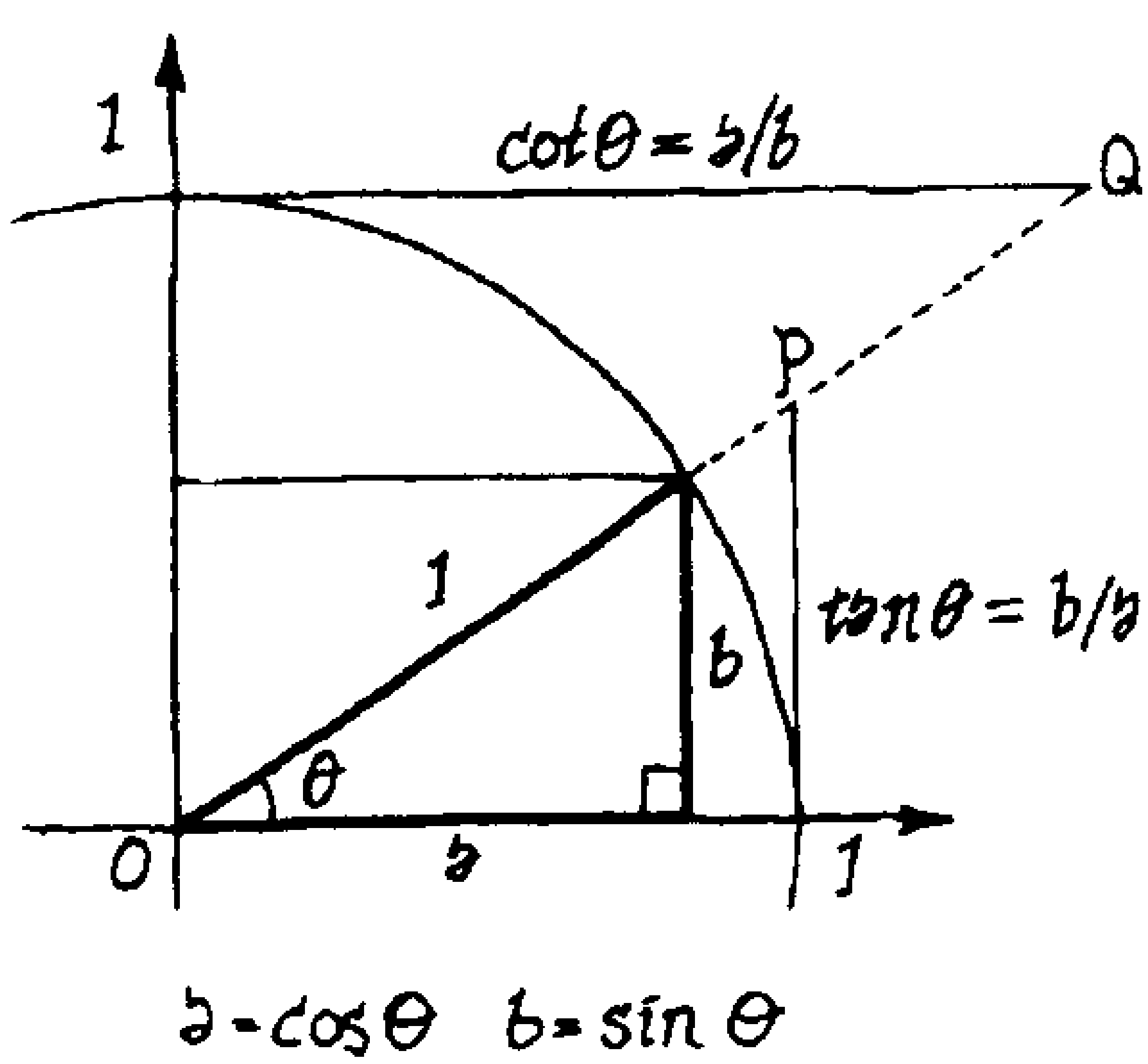
$$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta.$$

依照勾股定理（参见第 2 页），我们知道 $a^2+b^2=c^2$． 因此对于圆上的任何角度 θ，我们都可得出下列的恒等式：

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

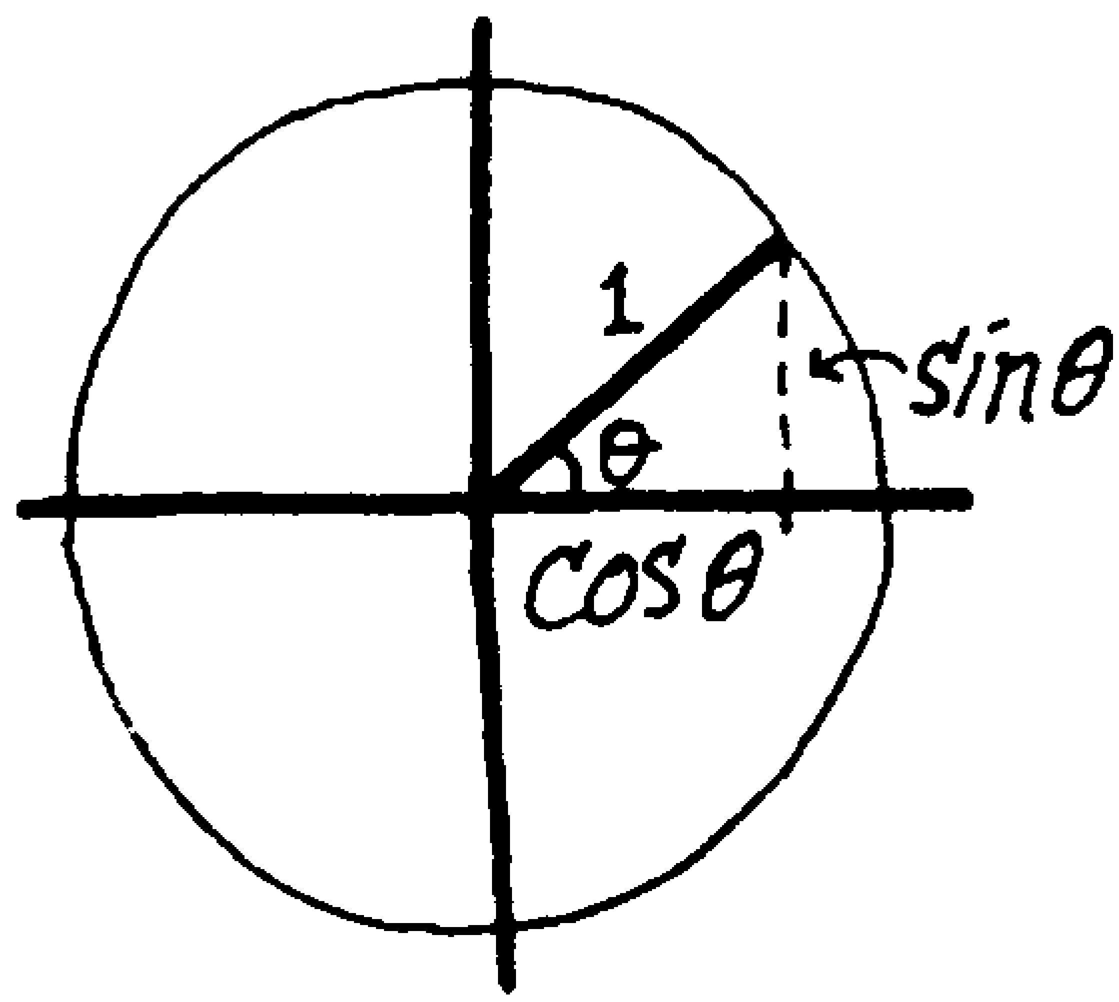


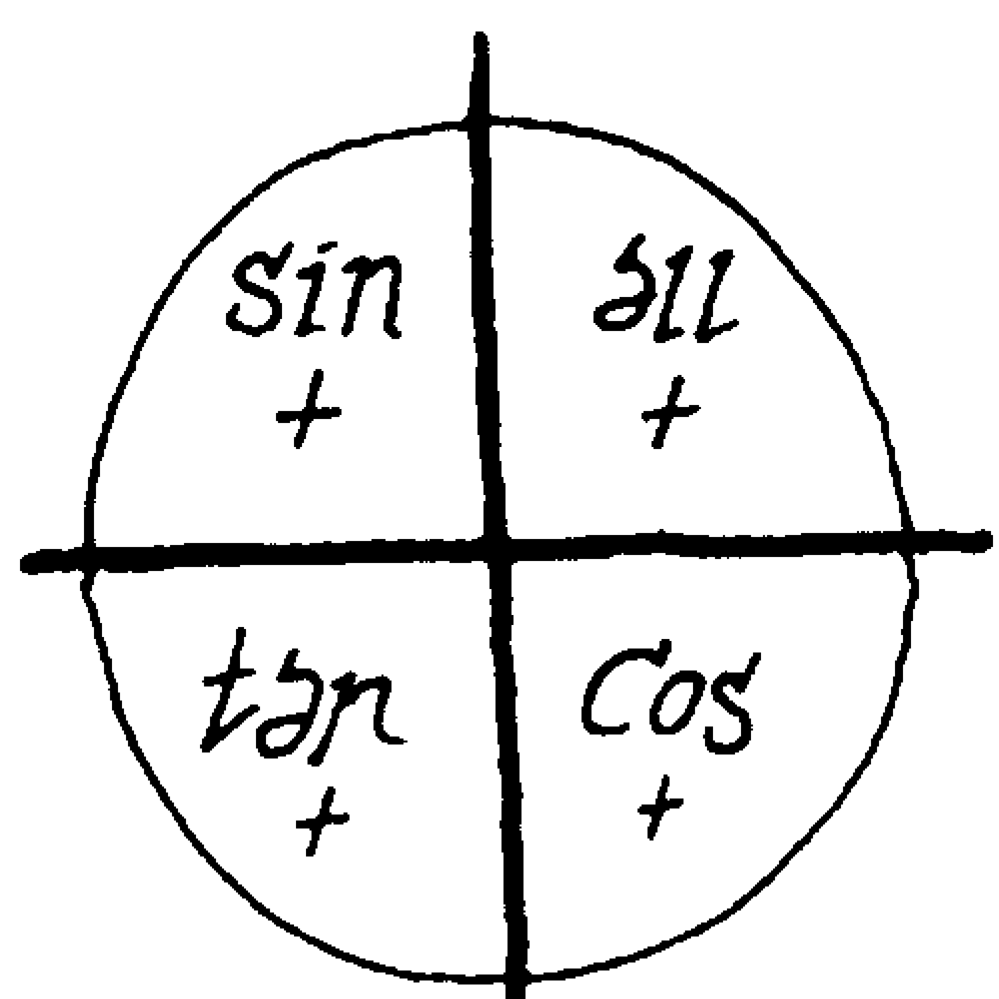
直角三角形

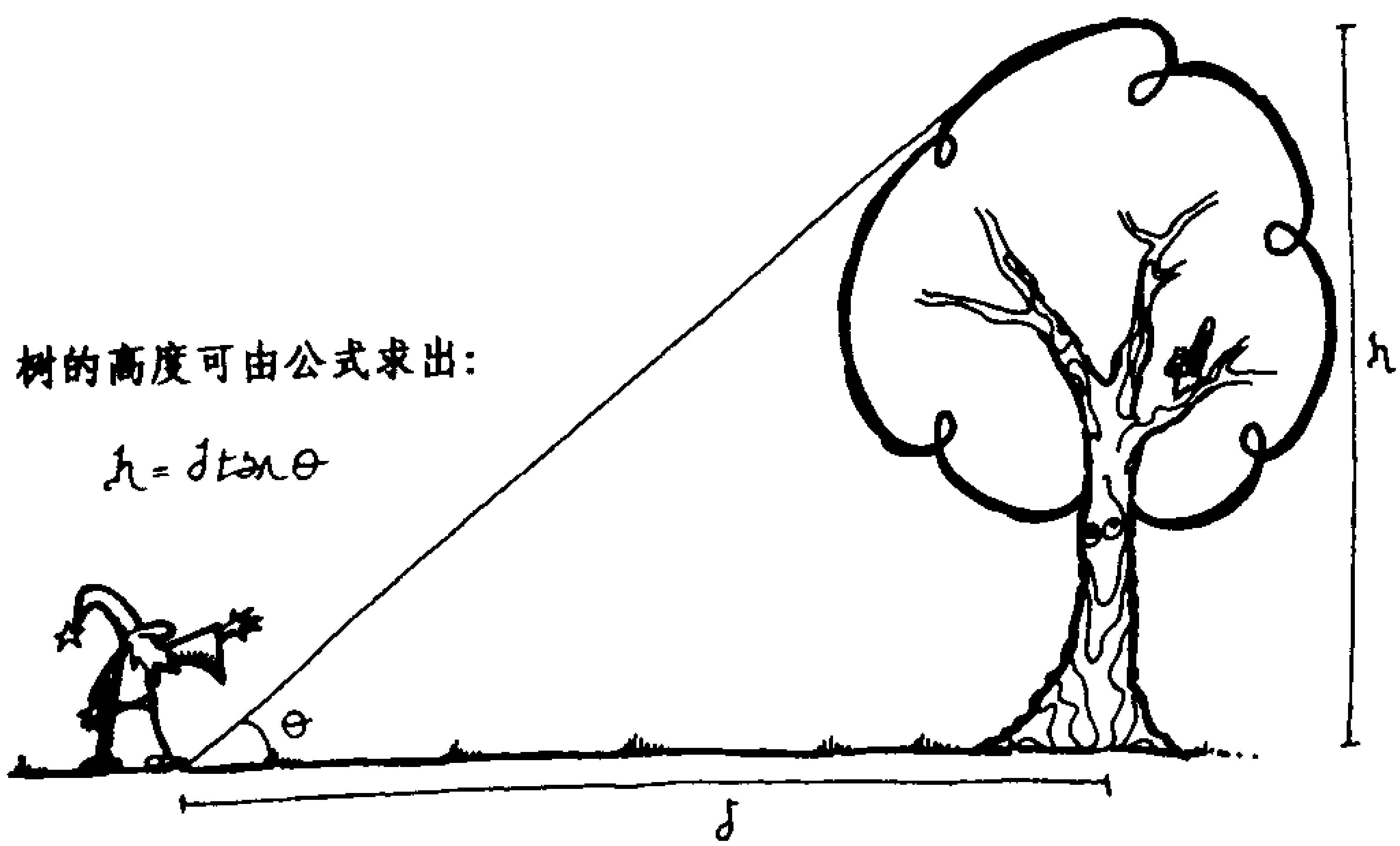


正切与余切的长度如图. OP 的长度等于 $\sec\theta$, 而 OQ 的长度等于 $\csc\theta$.

正弦、余弦与正切的值，在一个圆的不同象限里有正有负，如下图所示.






树的高度可由公式求出:
$h = d\tan\theta$
θ
h
d

三角恒等式

根据前几页所述的定义，我们可得到下列恒等式 (identity)：

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

分别用 $\cos^2\theta$ 与 $\sin^2\theta$ 来除 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，可得：

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1 \quad 及 \quad \csc^2\theta-\cot^2\theta=1.$$

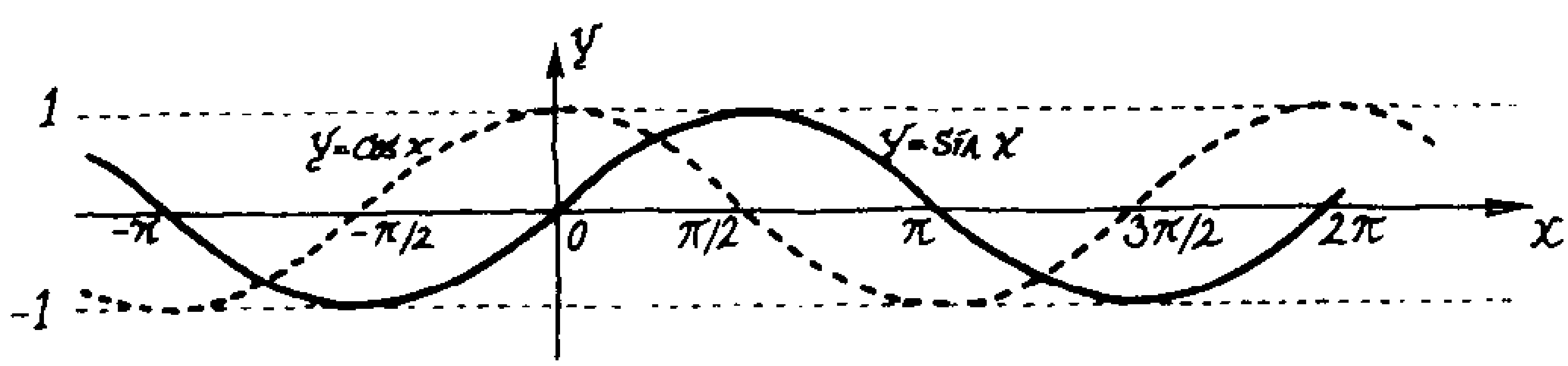
对于负角度，6 个三角函数分别为：

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \csc(-\theta)=-\csc\theta,$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \sec(-\theta)=\sec\theta,$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta,\quad \cot(-\theta)=-\cot\theta.$$

右页的图是以弧度 (radian，π 弧度 $=180°$) 制所画的正弦、余弦数值变化图.


y
1
-1
y=cos x
y=sin x
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
x

当两角度相加时，运用和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

若遇到二倍角或三倍角，运用倍角公式：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \sin3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha,$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \cos3\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

右页的表可提供你快速查询一些重要角度的三角函数值.

	弧度	sin	cos	tan	sec	csc	cot
0	0°	0	1	1	∞	1	∞
	2.5°	0.04362	0.9990	0.04366	22.926	1.00095	22.904
	5°	0.08716	0.9962	0.08749	11.474	1.00382	11.430
	7.5°	0.1305	0.9914	0.1317	7.6613	1.00863	7.5958
	10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.7588	1.0154	5.6713
	12.5°	0.2164	0.9763	0.2217	4.6202	1.0243	4.5107
	15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.8637	1.0353	3.7321
	17.5°	0.3007	0.9537	0.3153	3.3255	1.0485	3.1716
	20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.9238	1.0642	2.7475
π/8	22.5°	0.3827	0.9239	0.4142	2.6131	1.0824	2.4142
	25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.3662	1.1034	2.1445
	27.5°	0.4617	0.8870	0.5206	2.1657	1.1274	1.9210
	30°	0.5	0.8660	0.5774	2	1.1547	1.7321
	32.5°	0.5373	0.8434	0.6371	1.8612	1.1857	1.5697
	35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.7434	1.2208	1.4281
	37.5°	0.6088	0.7934	0.7673	1.6427	1.2605	1.3032
	40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.5557	1.3054	1.1918
	42.5°	0.6756	0.7373	0.9163	1.4802	1.3563	1.0913
π/4	45°	0.7071	0.7071	1	1.4142	1.4142	1
	47.5°	0.7373	0.6756	1.0913	1.3563	1.4802	0.9163
	50°	0.7660	0.6428	1.1918	1.3054	1.5557	0.8391
	52.5°	0.7934	0.6088	1.3032	1.2605	1.6427	0.7673
	55°	0.8192	0.5736	1.4281	1.2208	1.7434	0.7002
	57.5°	0.8434	0.5373	1.5697	1.1857	1.8612	0.6371
	60°	0.8660	0.5	1.7321	1.1547	2	0.5774
	62.5°	0.8870	0.4617	1.9210	1.1274	2.1657	0.5206
	65°	0.9063	0.4226	2.1445	1.1034	2.3662	0.4663
3π/8	67.5°	0.9239	0.3827	2.4142	1.0824	2.6131	0.4142
	70°	0.9397	0.3420	2.7475	1.0642	2.9238	0.3640
	72.5°	0.9537	0.3007	3.1716	1.0485	3.3255	0.3153
	75°	0.9659	0.2588	3.7321	1.0353	3.8637	0.2679
	77.5°	0.9763	0.2164	4.5107	1.0243	4.6202	0.2217
	80°	0.9848	0.1736	5.6713	1.0154	5.7588	0.1763
	82.5°	0.9914	0.1305	7.5958	1.00863	7.6613	0.1317
	85°	0.9962	0.08716	11.430	1.00382	11.474	0.08749
	87.5°	0.9990	0.04326	22.903	1.00095	22.926	0.04366
π/2	90°	1	0	∞	1	∞	1

球面三角学——天与地的公式

球面上的三角形，内角和介于180°与540°之间. 它的三边，即是大圆的弧（arc，圆心在球心）. 球面上的任意两点，可决定一个大圆，任意三点可决定一个小圆，不论是大圆或小圆，皆可定义出两极.

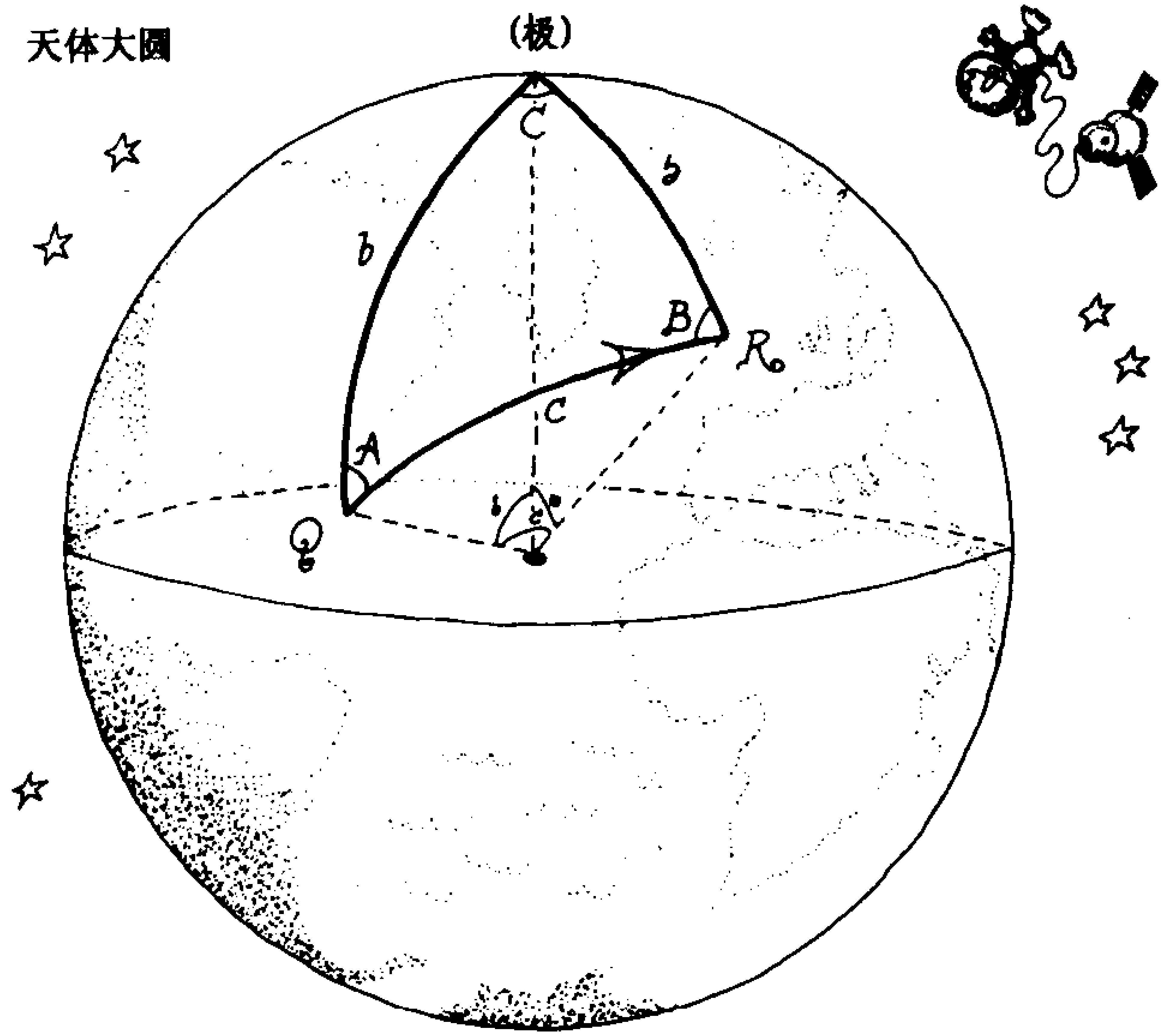
球面三角形的边，也可以当做角度，因此6个相关三角函数的方程式仍然遵守：

正弦定律 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

余弦定律 $$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$
$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.$$

正切定律 $$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}.$$

天体大圆



一大圆的 1 分（1/60 度）=1 海里

=6 080 英尺

=1 853 米

地球的平均周长=24 860 英里

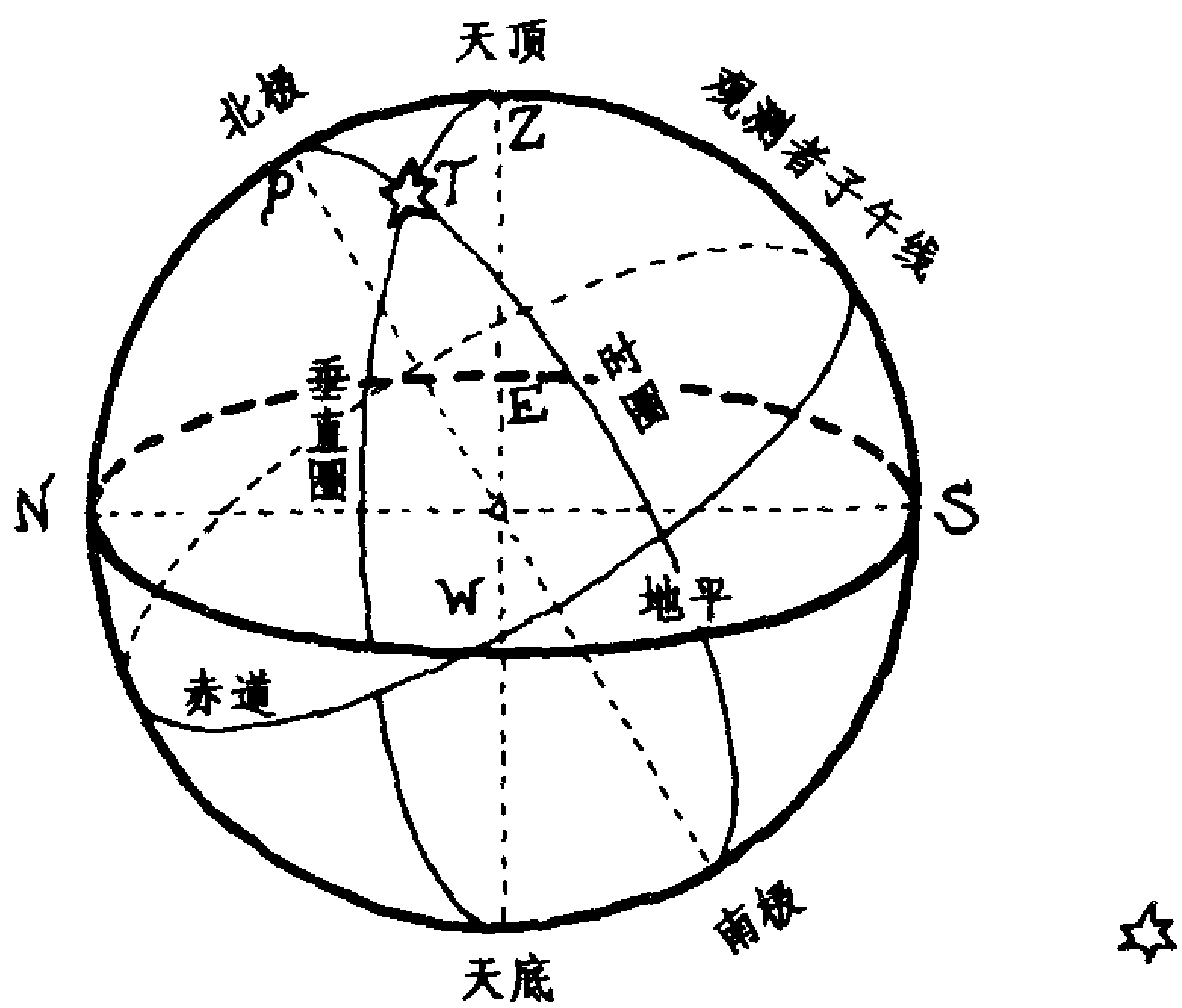
=40 000 千米

球面三角学应用于航海或航空上，例如，一个水手可利用经度角与纬度角，从前页图中的 Q 点航行到 R 点：

$$a=90^\circ-R\text{ 的纬度},$$
$$b=90^\circ-Q\text{ 的纬度},$$
$$C=Q\text{ 的经度}-R\text{ 的经度}.$$

C 就是所谓的极角（polar angle）．此路程始于起点与返回终点的方向，可由角度 A 和 B 求得，航行的路径长度，则可由弧度 c 得知．可利用下面的公式求解 A、B 与 c：

$$\tan\frac{1}{2}(B+A)=\cos\frac{1}{2}(b-a)\sec\frac{1}{2}(b+a)\cot\frac{1}{2}C,$$
$$\tan\frac{1}{2}(B-A)=\sin\frac{1}{2}(b-a)\csc\frac{1}{2}(b+a)\cot\frac{1}{2}C,$$
$$\tan\frac{1}{2}c=\tan\frac{1}{2}(b-a)\sin\frac{1}{2}(B+A)\csc\frac{1}{2}(B-A).$$



天体大圆

对某些天体而言，与天球三角形 *PZT* 相关的公式如下：

TZ 弧长 = 天顶至 *T* 的距离 = 90° − *T* 之纬度

TP 弧长 = *T* 的极距（polar distance）

= 90° − *T* 的偏角（declination）

ZP 弧长 = 90° ± 观测者所在的纬度（视北或南半球而定）

∠*PZT* = *T* 的方位角（azimuth，若 *T* 在观测者子午线以东）

= 360° − *T* 的方位角（若 *T* 在观测者子午线以西）

∠*ZPT* = *T* 的时角（hour angle，若 *T* 在观测者子午线西方）

= 360° − *T* 的时角（若 *T* 在观测者子午线东方）

判别式与抛物线

二次方程式的形式是 $ax^2+bx+c=0$（a 不等于 0）.
它的解或根可以由下面这个二次方程式求出来：

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

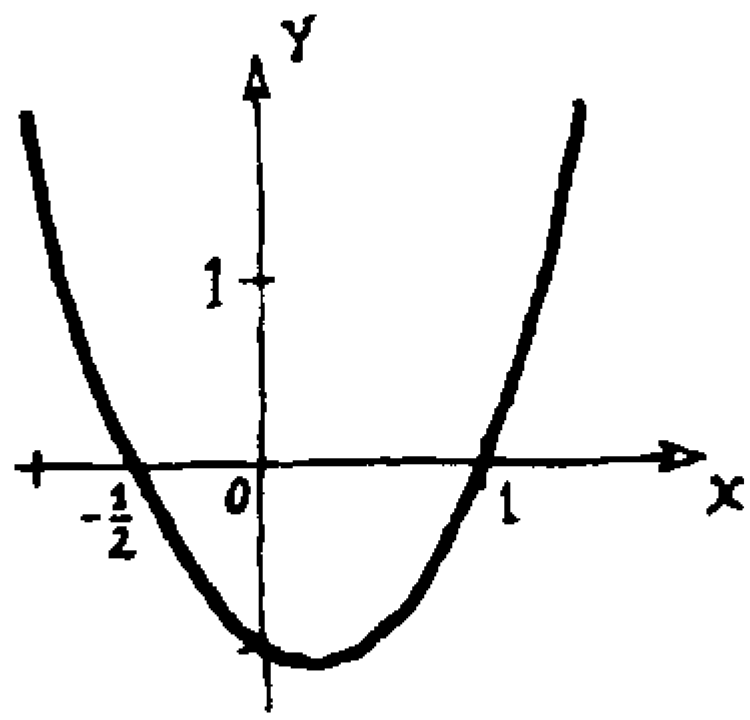
b^2-4ac 就称为二次方程式的判别式（discriminant），它能指出方程式解的数目与特性. 分别有下面三种情况：

$b^2-4ac>0$，有两个不同的实数解；
$b^2-4ac=0$，只有一个实数解；
$b^2-4ac<0$，有两个复数或虚数解
（虚数与实数不同，参阅第 98 页）.

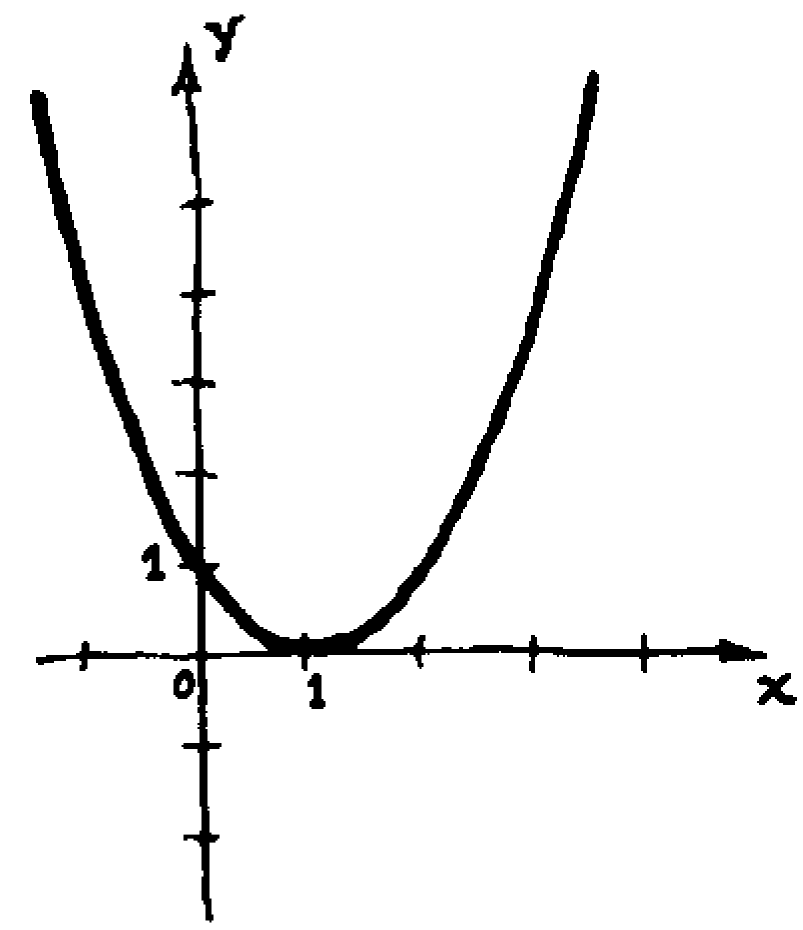
例题（见右页）：

i）$2x^2-x-1=0$，判别式为 9，有两个实数解 1 及 $-\frac{1}{2}$.

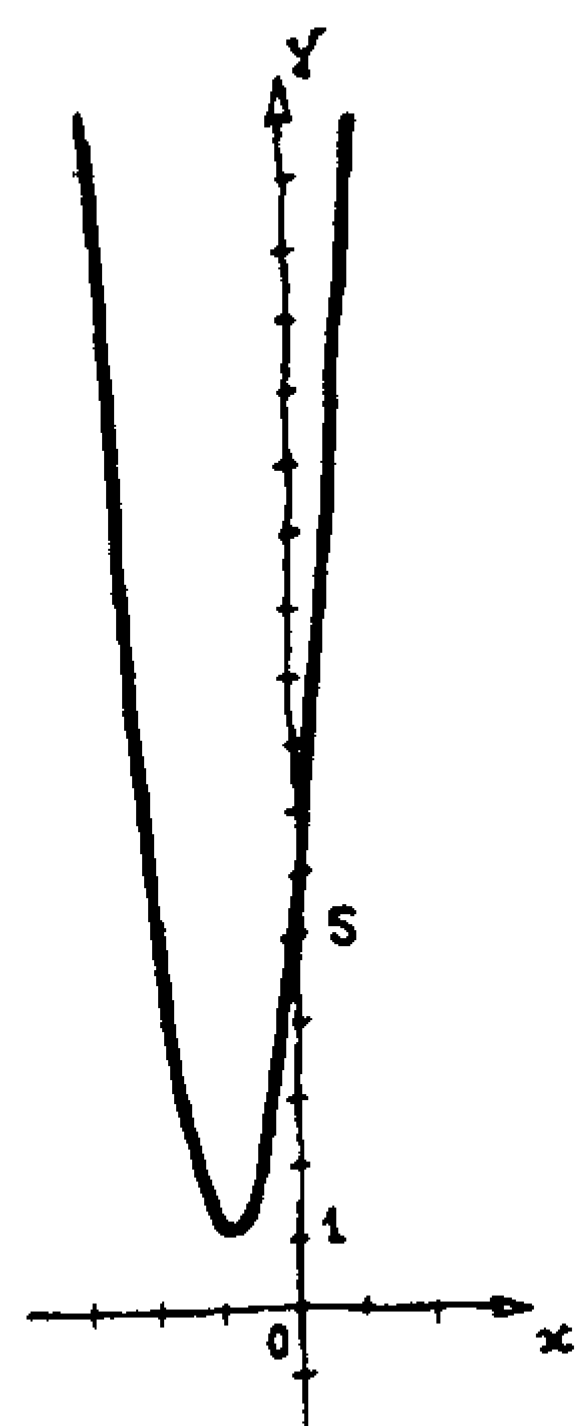
ii）$x^2-2x+1=0$，判别式为 0，只有一个实数解，$x=1$.



$Y = 2x^2 - x - 1$



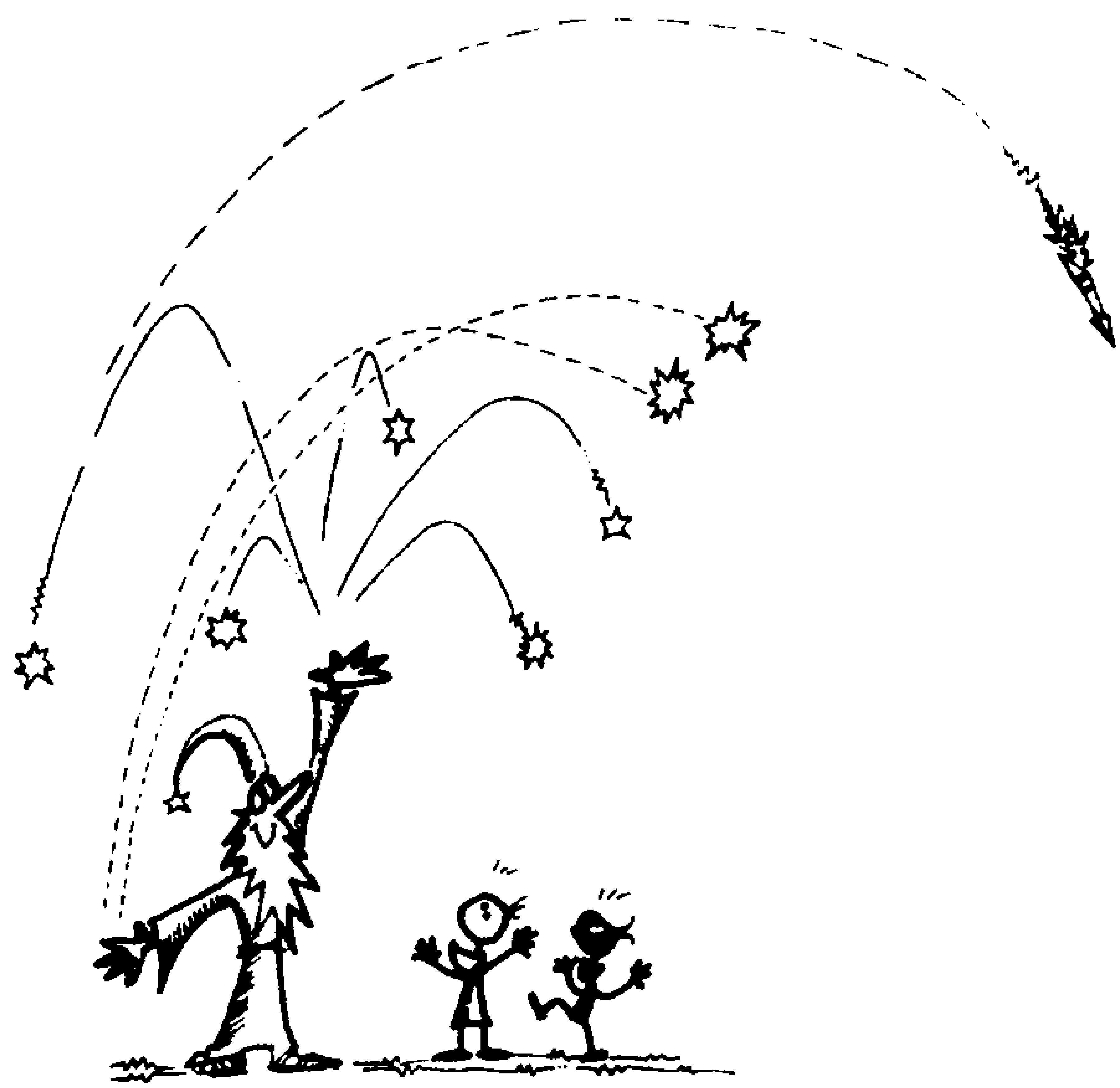
$Y = x^2 - 2x + 1$



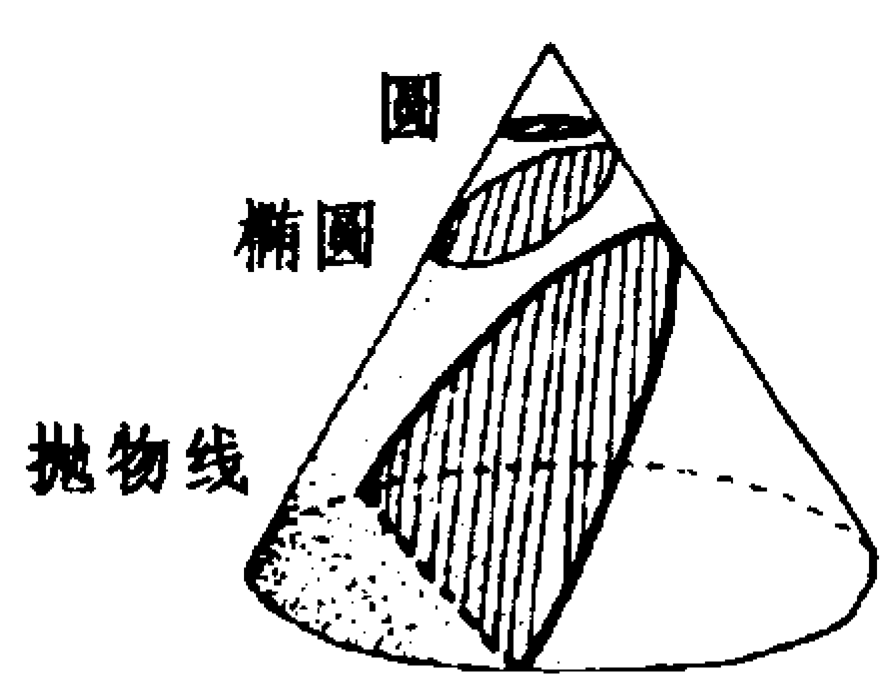
$Y = 4x^2 + 8x + 5$

ⅲ）$4x^2+8x+5=0$，判别式小于0，没有实数解，它的两个解为 $x=-1+\frac{i}{2}$ 与 $x=-1-\frac{i}{2}$（见前页图与第98页）。

当二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有实数解的时候，若依 $y=ax^2+bx+c$ 作图，x 轴上的值就是方程式的解（即 $y=0$）。



抛物线是理想抛体的行进路线



也就是圆锥体截面的外缘曲线

指数与对数——增长与衰变

已知一个 a 值，我们可以定义 a 的平方及 a 的三次方为 $a^2=a\times a$； $a^3=a\times a\times a$． 若表示成 a^n 的形式，a 为底数（base），n 就是指数（exponent）．下面是几个基本的指数公式：

$$a^0=1\ (0^0=0),\ a^p a^q=a^{p+q},\ (ab)^p=a^p b^p,$$

$$a^{1/n}=\sqrt[n]{a},\ (a^p)^q=a^{pq},\ a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p},\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}.$$

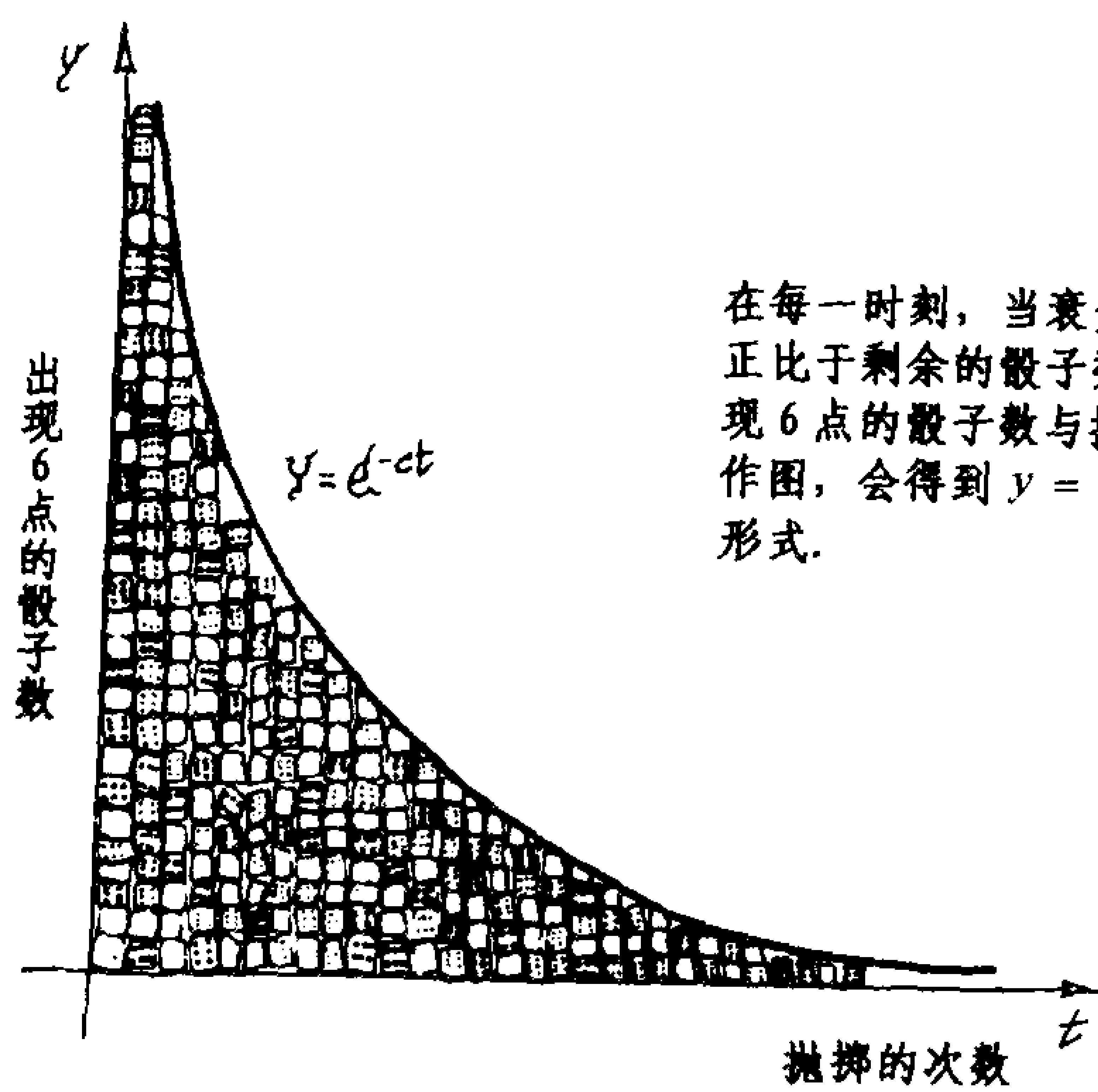
若 $a^y=x$，则以 a 为底的 x 的对数可以写成 $\log_a x=y$．因为 $a^0=1$ 而 $a^1=a$，因此 $\log_a a=1$，$\log_a 1=0$． 下面是一些主要的对数公式：

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y,\ \log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y,$$

$$\log_a x^k=k\log_a x,\ \log_a\frac{1}{x}=-\log_a x,$$

$$\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x,\ \log_k a=\log_m a\log_k m.$$

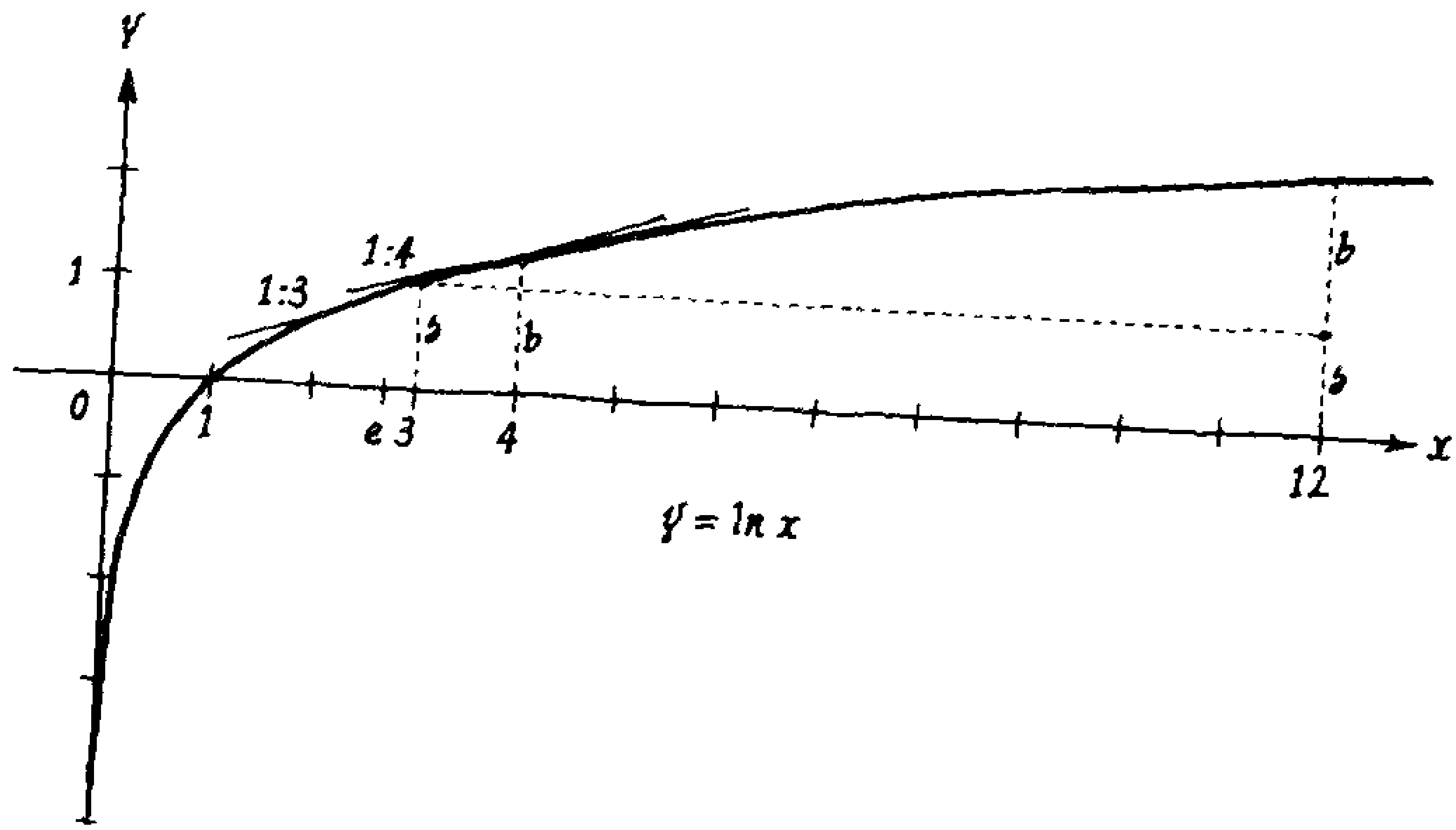
掷 y 个骰子，把出现 6 点的叠成一堆。再掷出剩下的骰子，并把出现 6 点的骰子再堆起来，然后不断重复此步骤。



在每一时刻，当衰变或增长率正比于剩余的骰子数时，对出现 6 点的骰子数与抛掷的次数作图，会得到 $y = e^{-ct}$ 方程的形式。

除了 1 之外，任何正数都可以为底，但最常用的底是 10 以及在自然世界里经常出现的常数 e（=2.718…），e 通常与增长、衰变的过程有关.

$\log_e$ 常写成 ln． 利用指数的加、减，可以把数字的乘、除用对数方式来运算.



注意：

$\ln e = 1, \ln 12 = \ln(3 \times 4) = \ln 3 + \ln 4$

也请注意曲线上任何 x 点的斜率是 1： x，

并且，不管 x 的尺度如何放大或缩小，$y = \ln x$ 的图像不变。

均值与概率

已知两数 a 与 b，在传统上用于几何学及乐理上的三种重要平均数如下：

算术平均数　$\frac{1}{2}(a+b)$.

几何平均数　$\sqrt{ab}$.

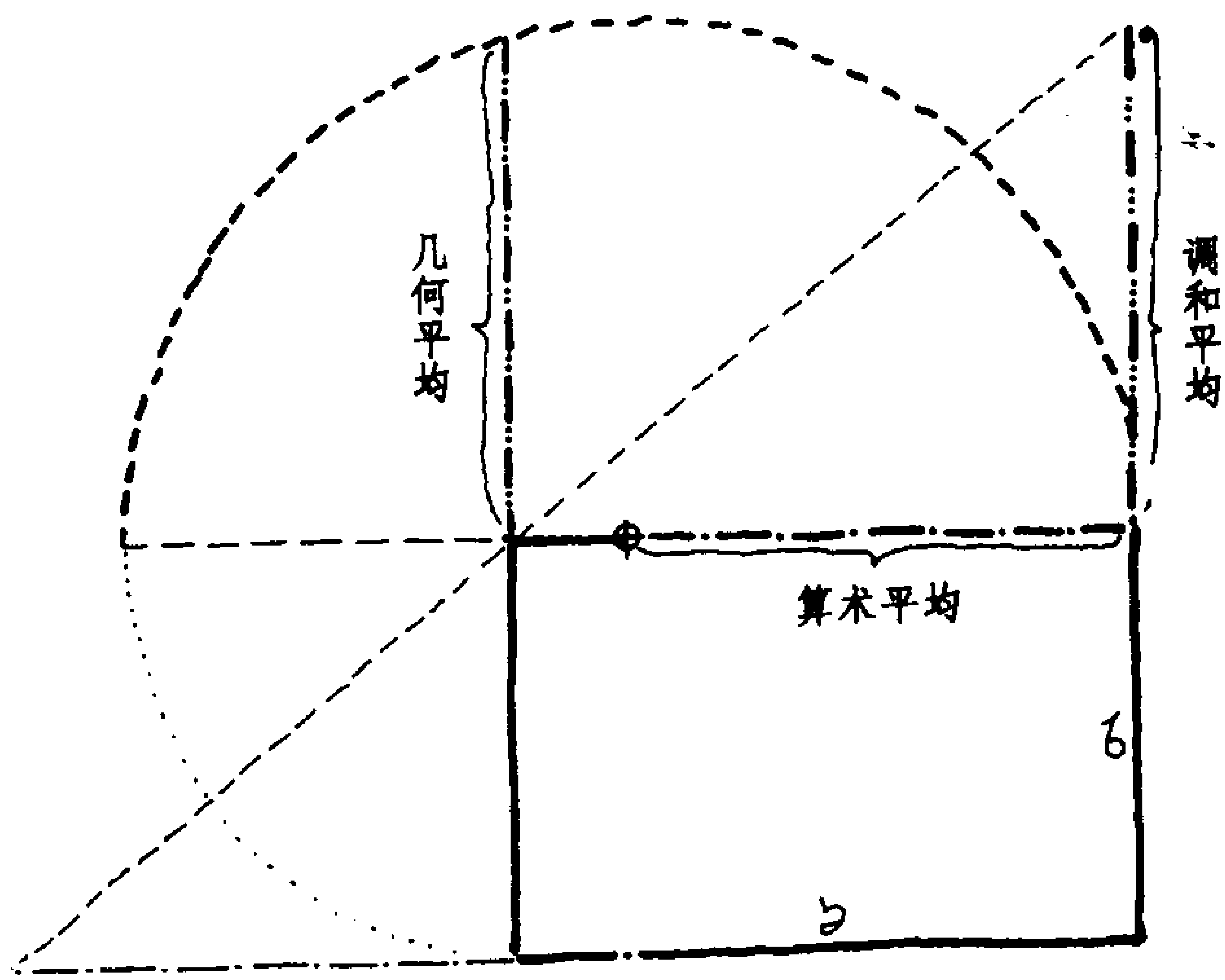
调和平均数　$\frac{2ab}{a+b}$.

假设某种情况有 n 种可能性，且出现的机会均等（每一种可能性皆有 k 次机会），则任何一种所期望的结果发生的概率是：

$$P=\frac{\text{所期望的结果出现的次数}}{\text{全部可能性出现的次数}}=\frac{k}{n}.$$

注意，P 的值永远在 0 与 1 之间. 假设 E 与 F 是两起完全不相关的事件，它们出现的概率分别是 $P(E)$ 与 $P(F)$，则 E 与 F 同时出现的概率是

$$P(EF)=P(E)\times P(F).$$


几何平均
调和平均
算术平均
b
a

同样地，我们也可以把不是 E 出现就是 F 出现的概率表示为 $P(E+F)=P(E)+P(F)-\mathrm{P}(EF)$.

例如在右页图中，G 与 H 代表我们从左袋中拿出黑球的概率，则 $P\ (GH)\ =\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$（见第 111 页的分数公式）.

若 F 事件不是独立的，它的出现与 E 事件有关，会受到 E 是否出现的影响，则我们可以定义条件概率（conditional probability）$P\ (F\mid E)$，得出一旦 E 出现后，F 出现的概率，并且 $P(EF)=P(E)\times P(F\mid E)$.

我们要从每个袋子里挑出一个球：

$P(E)$ ＝从左袋中挑出黑球的概率＝2/5

$P(F)$ ＝从右袋中挑出黑球的概率＝4/6＝2/3

$P(EF)$ ＝从左、右袋中都挑到黑球的概率＝2/5×2/3＝4/15

$P(E+F)$ ＝从左、右袋中至少挑出一个黑球的概率＝2/5＋2/3－4/15＝4/5

组合与排列

假设我们有 n 件物品，想取其中的 k 件来做分组或安排，则方式有两种；若不管次序，叫做“组合”(combination)，如果和次序有关，则称为“排列”(permutation)．这里我们要用到阶乘（factorial）的概念．m 的阶乘写成 $m!$（$m\geqslant 1$），定义为

$$m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1$$

（例如，$6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$）．

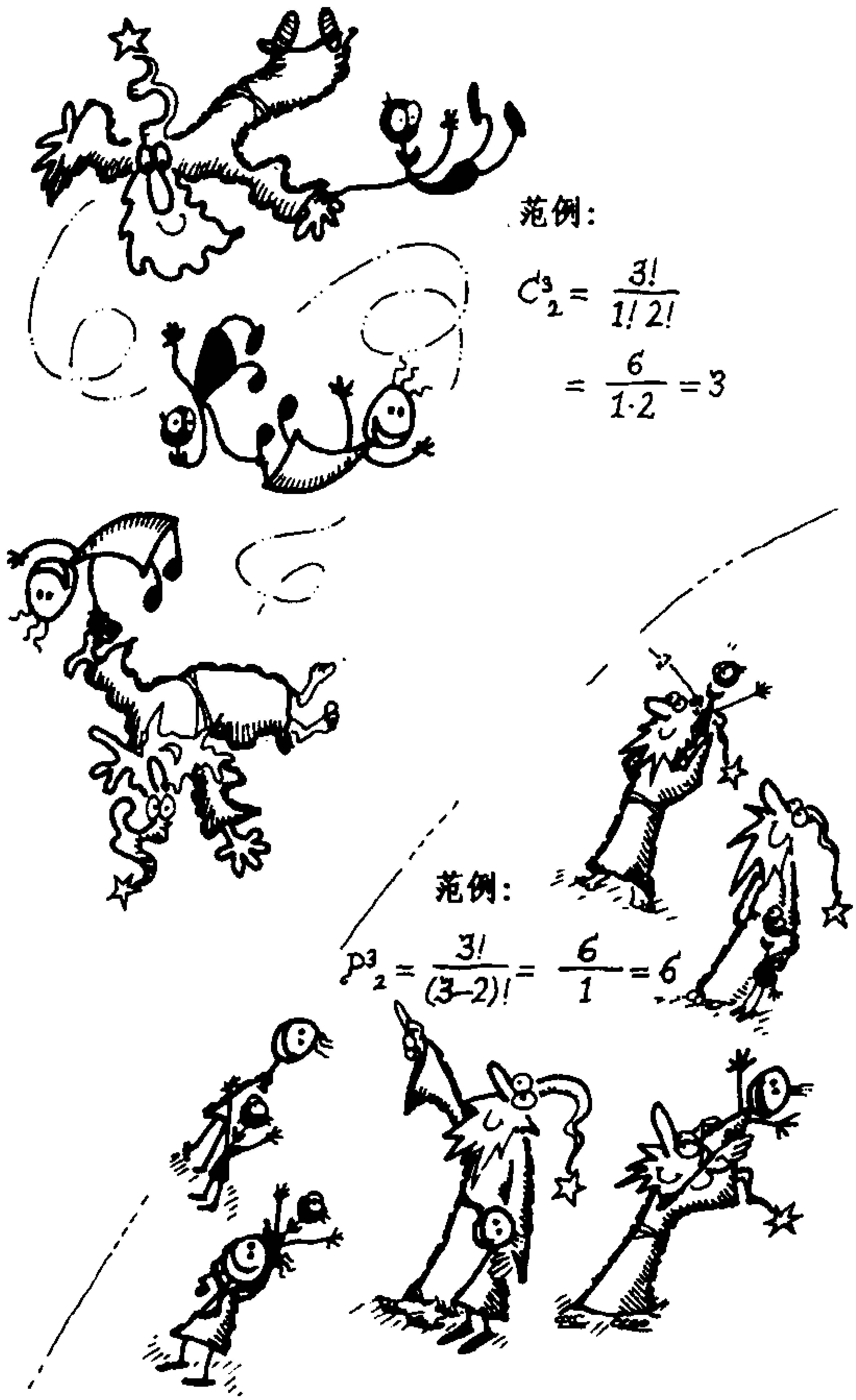
0 是特殊情况，约定俗成 $0! = 1$．

由 n 件物品中挑出 k 件，组合方式的数目为

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}，也写成\binom{n}{k}.$$

排列方式的数目则大得多（不同次序有不同结果）：

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\ \binom{n}{k}.$$


范例:
$C^3_2 = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$
范例:
$P^3_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$

当一情况有两种可能出现的结果 P 与 Q 时（姑且把它们的概率分别设为 p 及 q），我们知道 $p+q=1$，因此，$(p+q)^n=1$。

在 $(p+q)^n$ 的二项展开式中，总项数为 n 项，P 出现 $n-k$ 次、Q 出现 k 次的概率是 $\binom{n}{k}p^{n-k}q^k$。一般的二项式公式为：

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

杨辉三角形的数列恰与二项展开式对应，例如 $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

杨辉三角形中的每个数字，都是它上列左右两个数字的和。三角形的第 $n+1$ 列数字，则对应于 $(x+y)^n$ 展开式的各个系数。

统计学

统计分析让我们能对观测到的数据样本进行研究，以便了解其趋势，并加以预测．若 x_1，x_2，…，x_n 是一组可量化现象的数值，则它们的平均数为

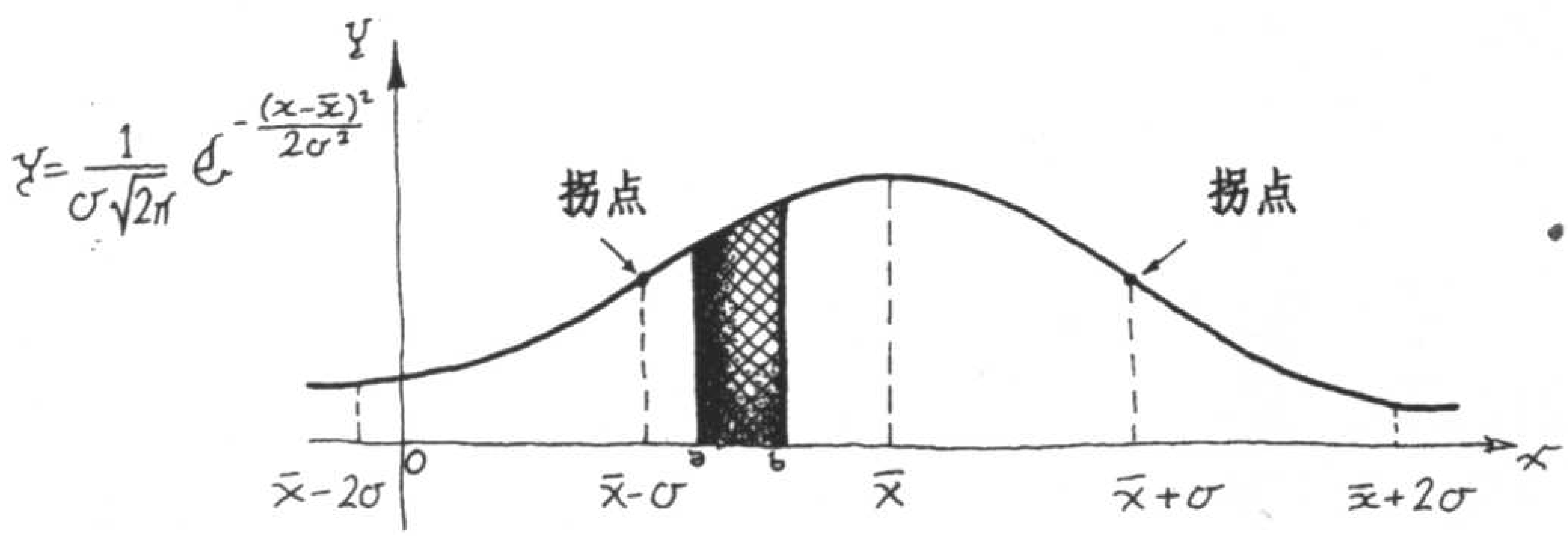
$$\bar{x}=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right).$$

标准差 σ（standard deviation）是用来估计这些数据偏离平均数的范围的：

$$\sigma=\sqrt{\frac{x_1^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{(x_1^{\ 2}-\bar{x}^2)+\cdots+(x_n^{\ 2}-\bar{x}^2)}{n}}.$$

最常用的统计分布是正态分布，或称作高斯分布(Gaussian distribution)．它的形状通常为钟形曲线，中心是 $\bar{x}$，中心区域的宽度则与 σ 有关．

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}.$$



标准差 σ 是个很有用的单位，利用标准差，可以测量样本的分布范围．请注意拐点在曲线上的位置．

68.26% 的样本落在 $\bar{x}$ 两旁的 σ 之内

95.44% 的样本落在 $\bar{x}$ 两旁的 2σ 之内

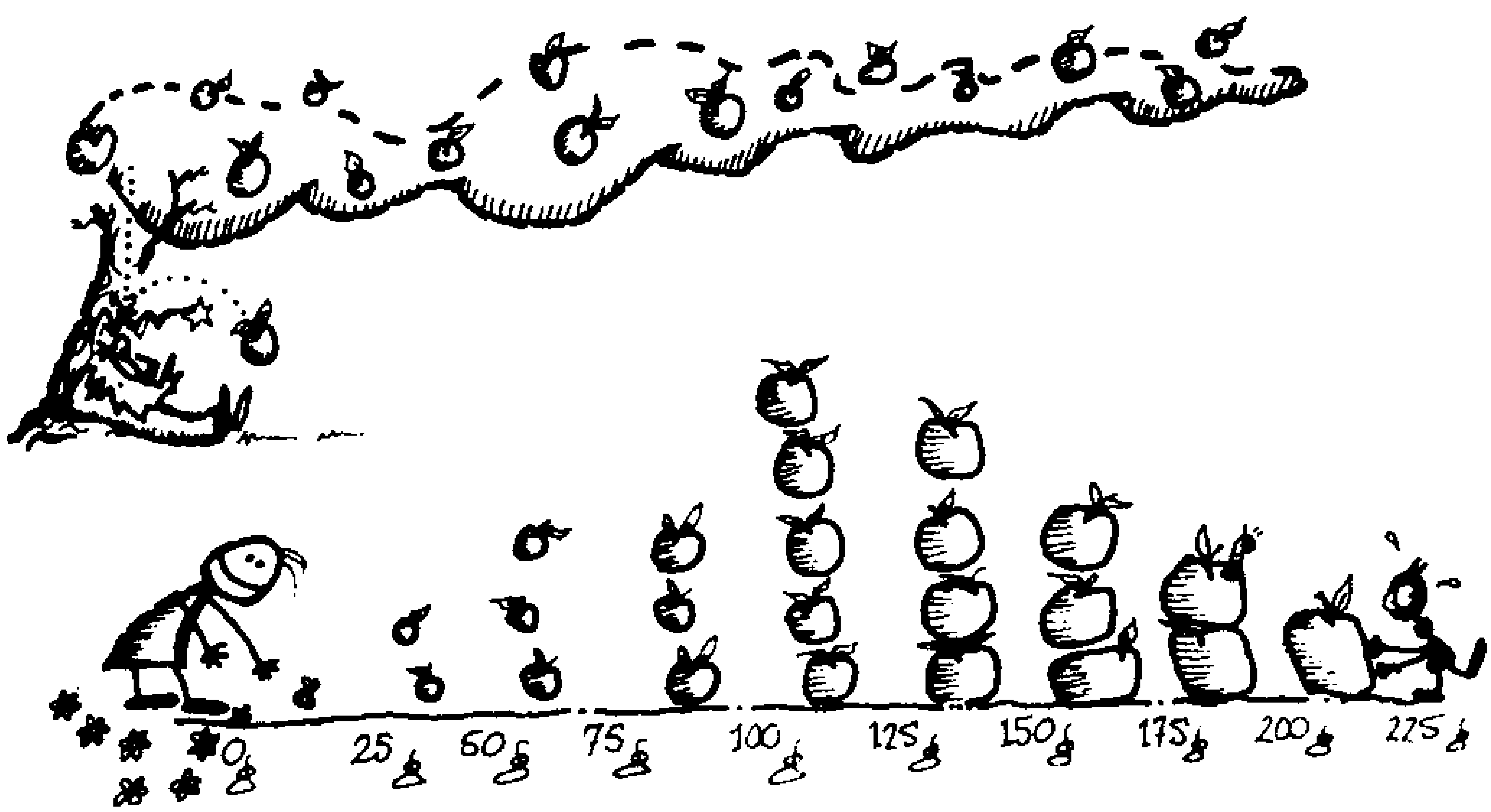
99.73% 的样本落在 $\bar{x}$ 两旁的 3σ 之内

如前一页图所示，正态分布的数据中，其值分布在 a、b 之间的概率，等于曲线下方、介于 a 和 b 之间的面积；而曲线下的全部面积（所有概率相加）等于1.

将成堆大小不等的苹果，根据一套以苹果大小来分类的系统排列，随机取样，把同样大小的苹果一个个往上叠，我们便可以得到频率分布图（frequency distribution graph），见右页. 若取样的数目足够多，这个图的形状便会趋向一条连续曲线，也就是正态分布（高斯分布）曲线.

泊松分布（Poisson distribution）是说，在一段固定时间区间内，若某种特殊事件出现的平均次数是 μ，则在同长度时间区间内出现 n 种事件的概率是

$$P(n)=\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \qquad (e=2.718\cdots\text{见第 36 页})$$


0
25
60
75
100
125
150
175
200
225

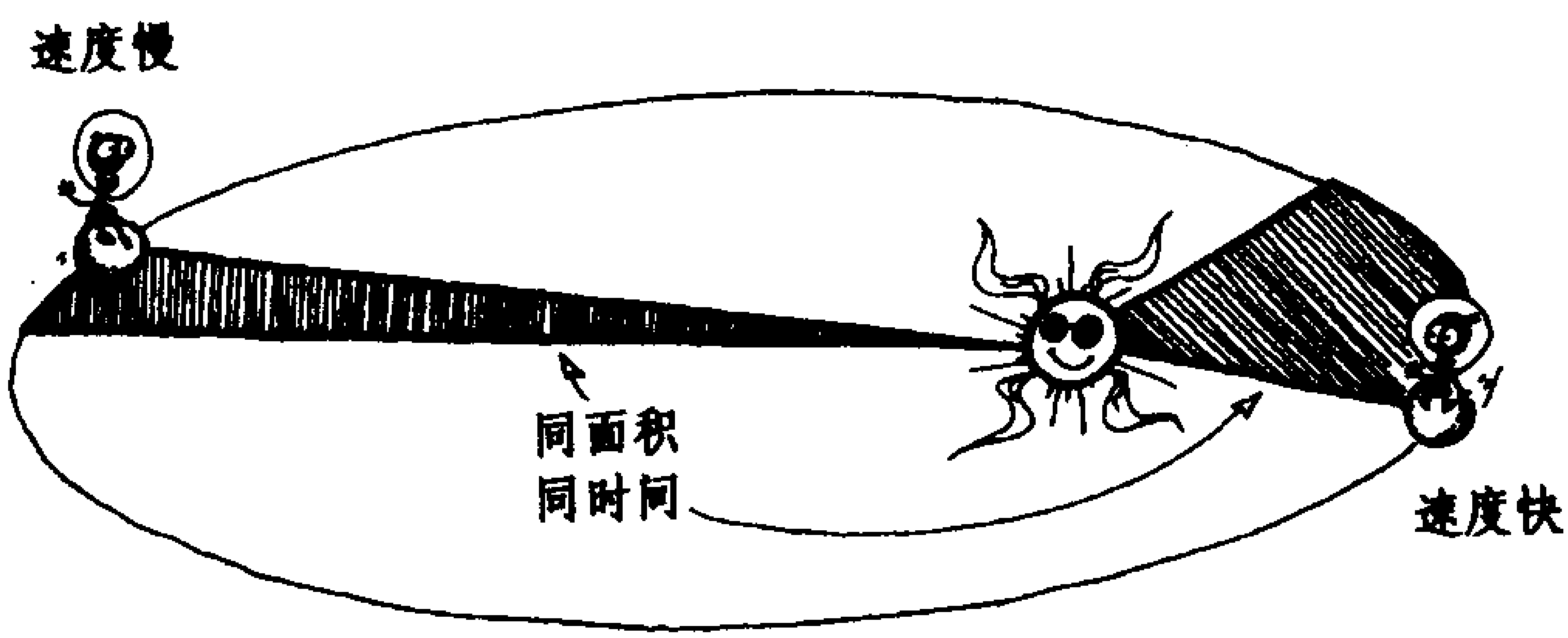
开普勒与牛顿定律

开普勒（Johannes Kepler，1571～1630，德国天文学家）发现行星三大运动定律，所有环绕轨道运行的天体，都遵守这三项定律.

1. 行星运行的轨道是椭圆形的，太阳位于椭圆的一个焦点上.

2. 太阳与行星的连线，在相同时间内扫过的面积相等.

3. 行星环绕太阳旋转周期（period）的平方，除以轨道长轴一半（见第6页）的立方，是个常量，这个定理适用于整个太阳系内的行星.



开普勒面积定律

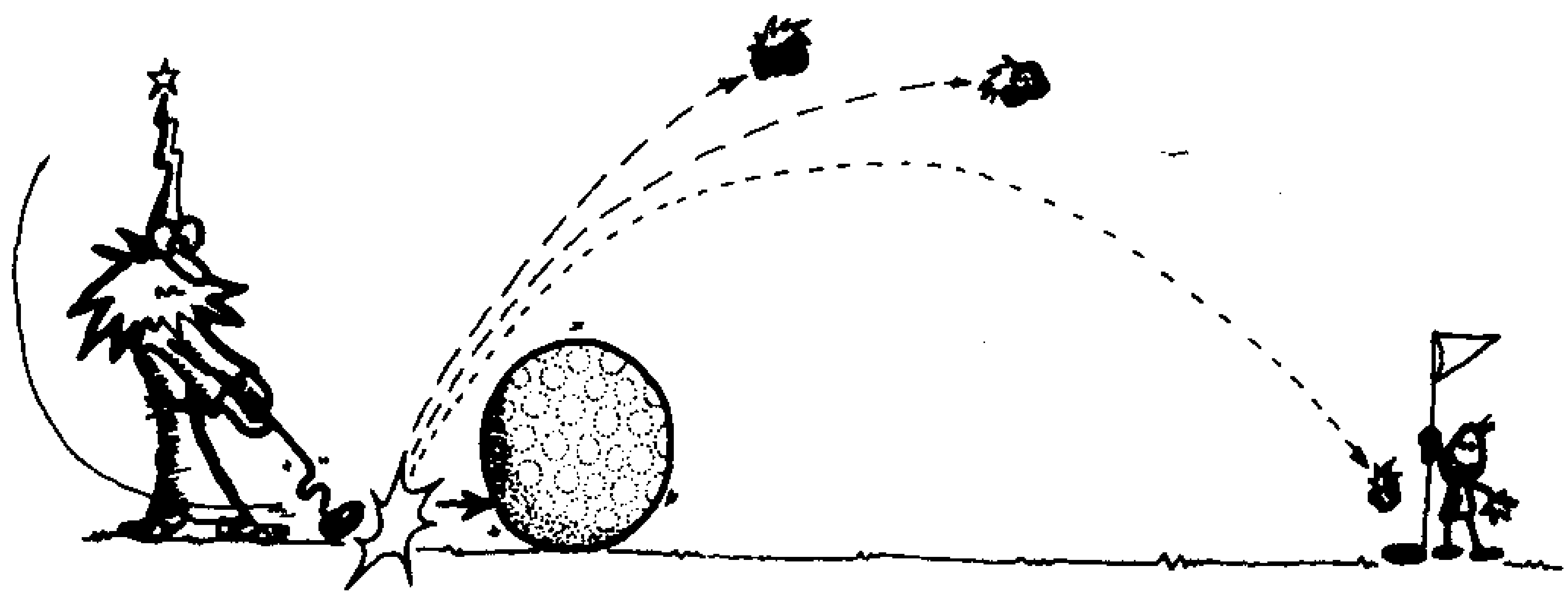
利用开普勒的发现，牛顿（Isaac Newton，1642～1727，英国物理学家、数学家）推导出万有引力定律，再继续推导出牛顿运动定律：

1. 在没有受到外力作用的情况下，物体保持静止状态，或者保持匀速直线运动状态.

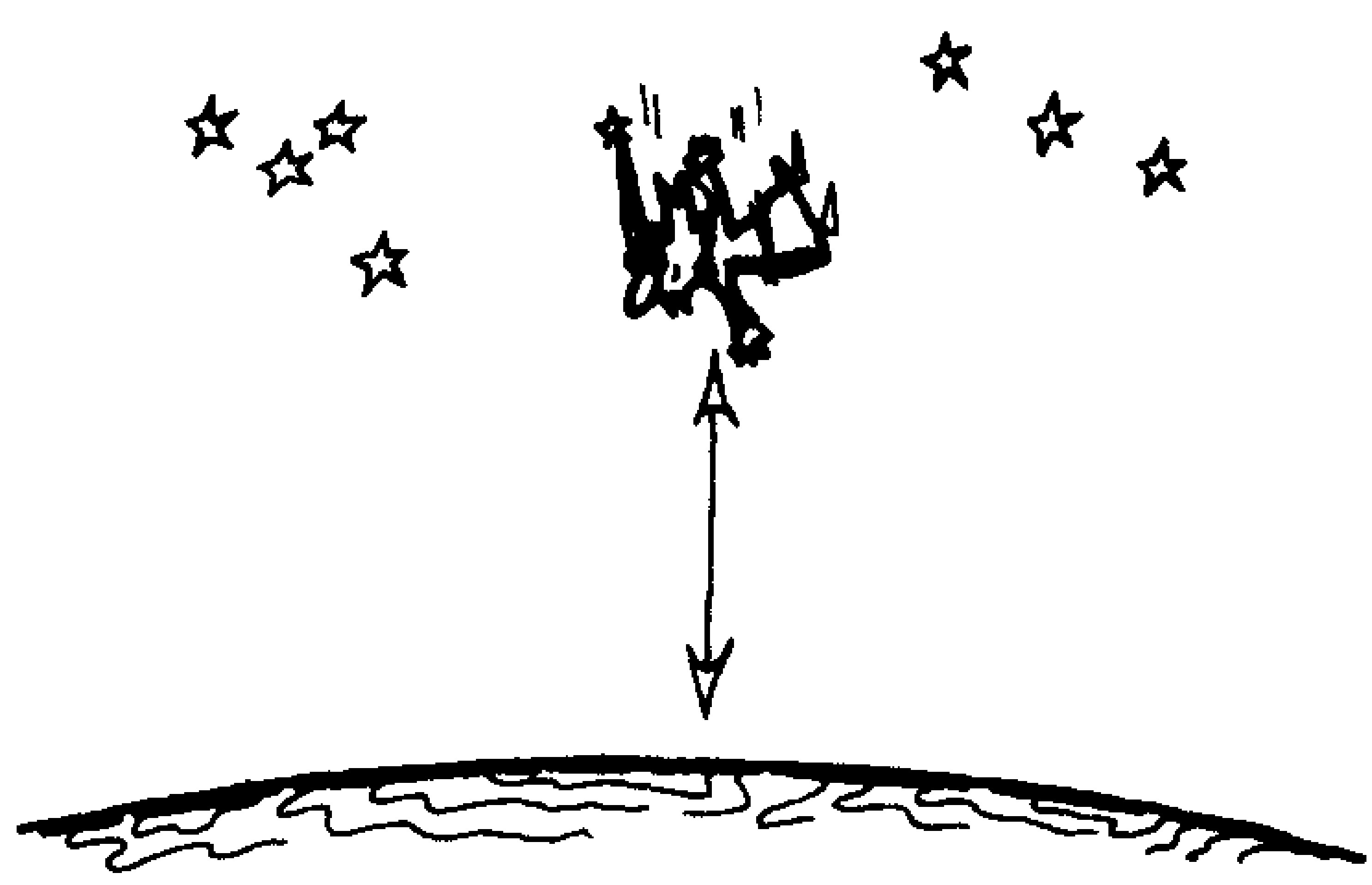
2. 物体受外力之后产生的加速度（acceleration），与所受外力成正比.

3. 当 A 施一力作用于 B，必定会伴随一股大小相同、方向相反的力，由 B 反作用于 A.

爱因斯坦（Albert Einstein，1879～1955，美籍德国理论物理学家）发现，当物体的速度接近光速时，牛顿定律需要大幅修正.



力=质量×加速度



物体向地面坠落时，也会产生一个把地球拉向物体的反方向吸引力。然而这个反作用力微不足道，因为地球的质量太大了，她几乎感觉不到有加速度存在。

重力与抛体

牛顿的万有引力定律指出，任何两件物体，质量分别为 m_1、m_2，相距为 d，彼此之间会有一股大小相等、方向相反的力 F，

$$F=\frac{Gm_1m_2}{d^2},$$

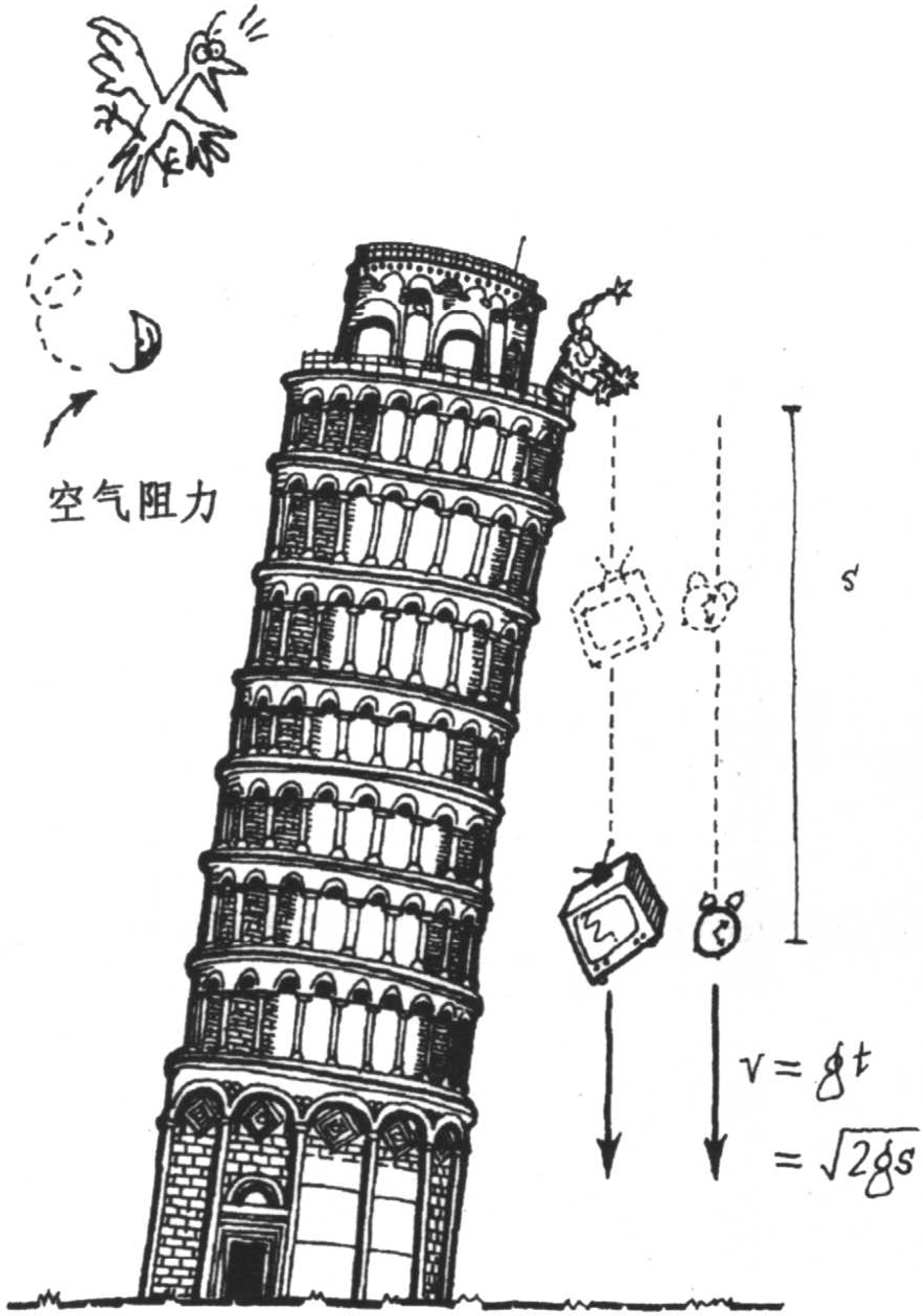
G 称为万有引力常数（见附录）. 注意 d 是指 m_1 与 m_2 质量中心（center of mass）之间的距离.

若物体位于地球（设该物体质量为 m_2）表面附近，则 d 近乎是固定的，因此我们可以得到一个“区域”重力加速度常数 g，

$$g=\frac{Gm_2}{d^2}=9.80665\ \mathrm{m/s^2}，因此\ F=m_1g.$$

若忽略空气阻力，一个由静止开始下坠的自由落体，它在 t 秒内走了 s 米的距离，则 s 与 t 的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad 或 \qquad t=\sqrt{\frac{2s}{g}}.$$


空气阻力
s
$v = gt$
$= \sqrt{2gs}$

若忽略空气阻力，自由落体在时间 t 的速度 v 为

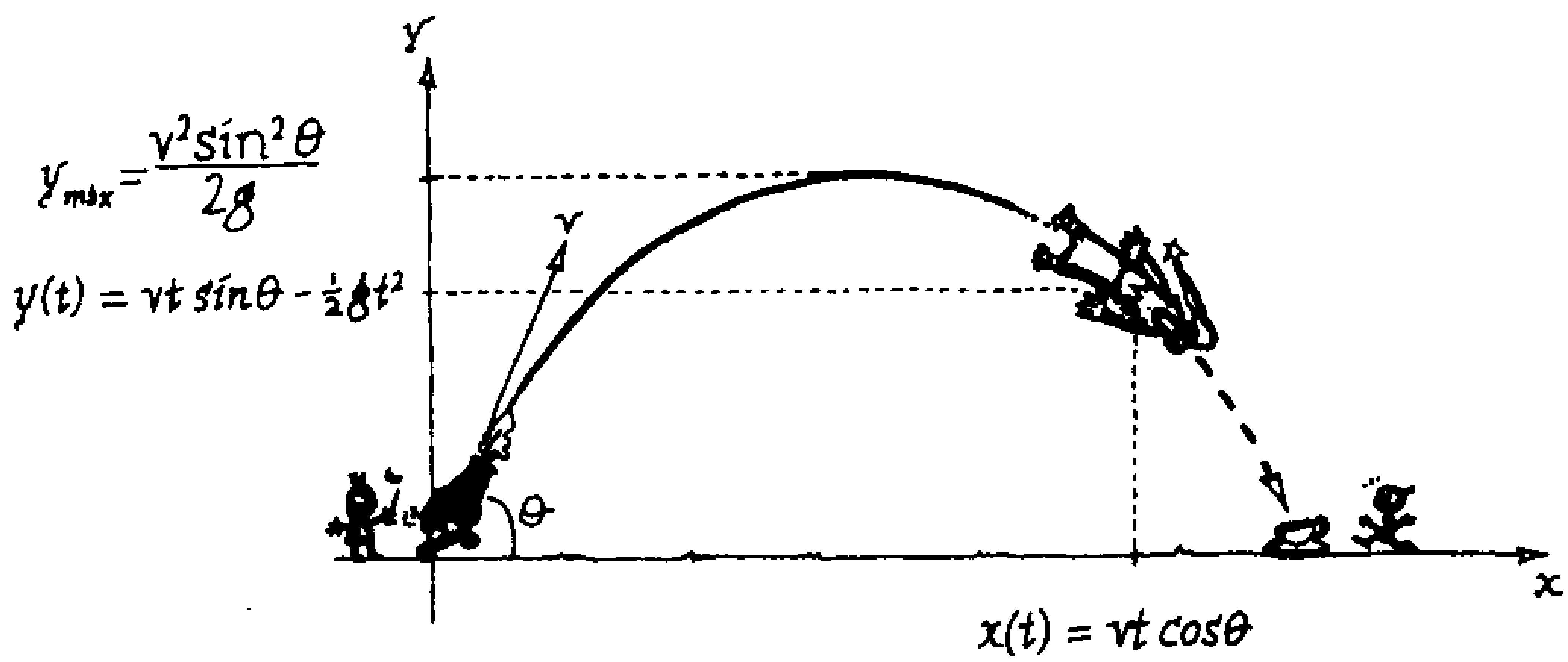
$$v = gt = \sqrt{2gs}\ \mathrm{m/s}.$$

注意，这个值与质量无关.

一个抛体，若初始速率是 v，而抛射角是 θ，则它的路径是

$$x(t) = vt\cos\theta \qquad 与 \qquad y(t) = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2,$$

$x(t)$ 与 $y(t)$ 是随时间改变的坐标值.



落地时间为 $\frac{2v\sin\theta}{g}$

能量、功与动量

一个质量为 m 的物体，以速度 v 直线前进时，它的动能（kinetic energy）是 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$，这是它运动中所蕴含的能量. 如果施一外力把它的速率改成 u，则外力所做的功 W，就等于动能的改变量：

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2.$$

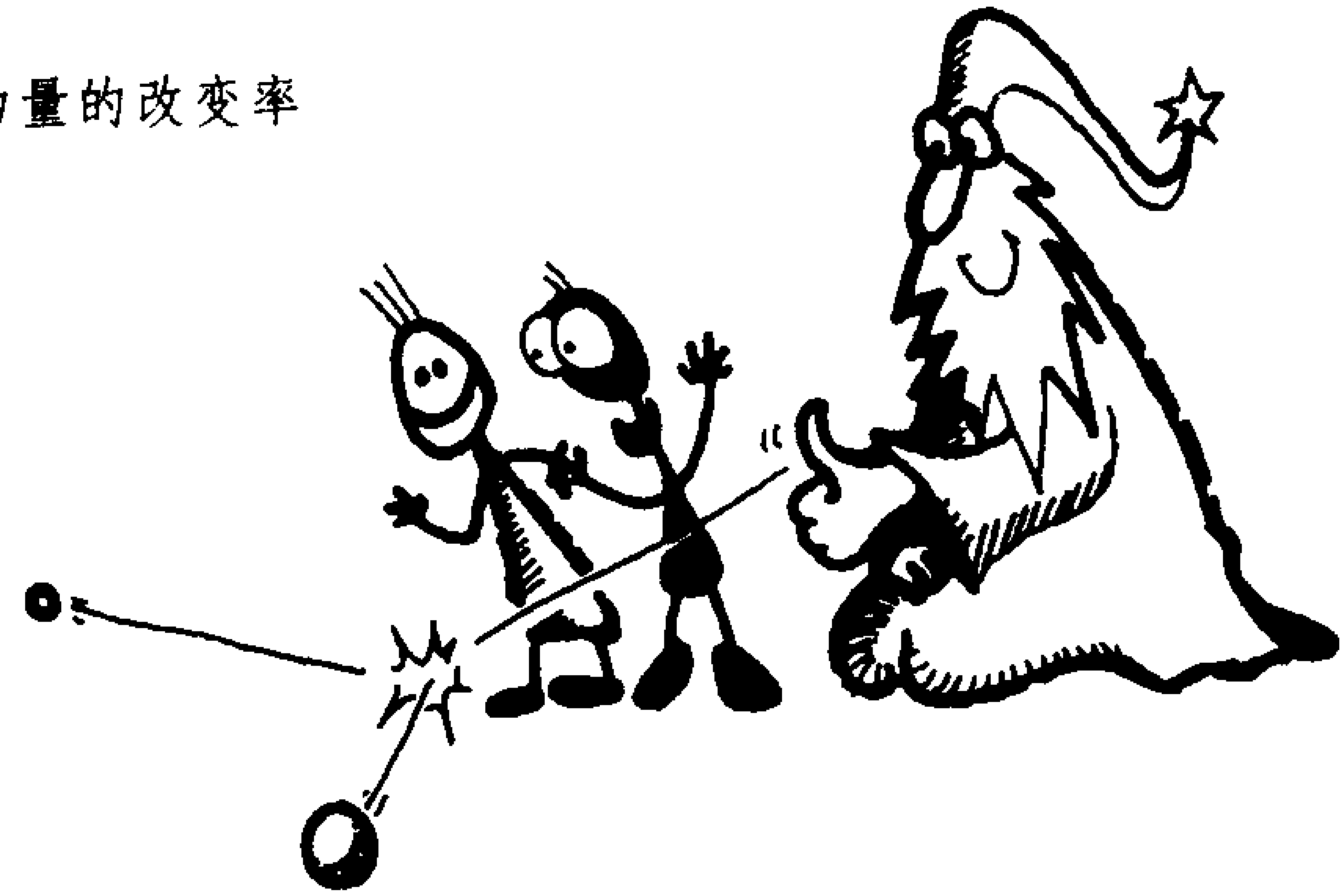
通常，功是用来度量物体之间的能量交换的. 若有人把质量 m 的物体往上提到 h 的高度，他必定是做了功，这个功转变成了物体的重力势能（gravitational potential energy）E_p，也因此，物体便能往下掉.

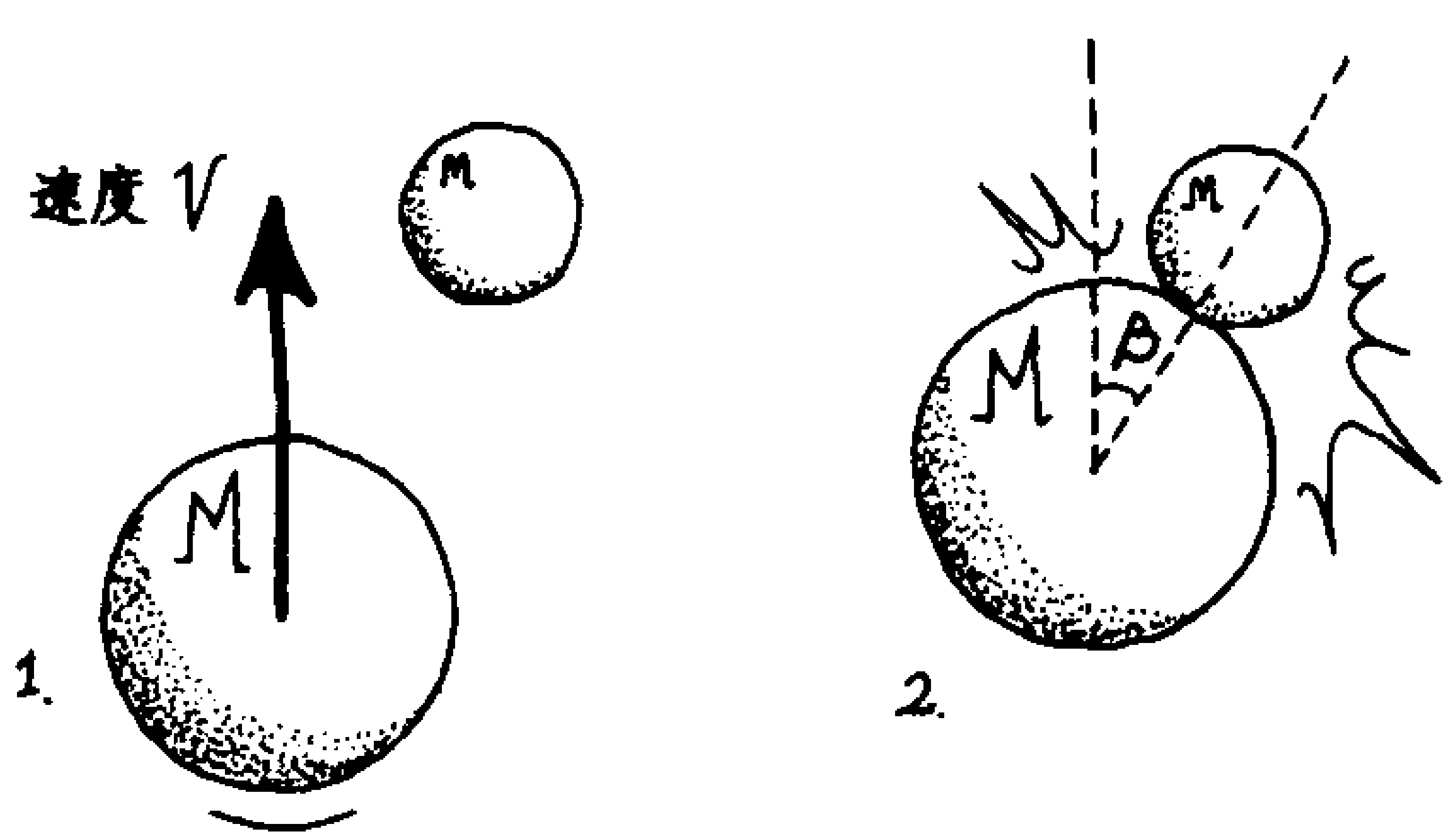
$$E_p=mgh,$$

其中，mg 是物体的重量，是一种力.

当物体往下落时，它“损失”了高度，却加快了速度，因此 E_p 减少，E_k 增加；若忽略摩擦力，总能量 $E=E_k+E_p$ 会保持定值，直到物体落地为止，到时，物体的动能就会消耗（转换）成为热与声音.

力 = 动量的改变率





动能是守恒的，因此 $1/2MV^2 = 1/2Mp^2 + 1/2mq^2$

一个物体的线动量（linear momentum）定义为

$$p = mv.$$

对一个质量 m 的小物体而言，以 r 为半径绕一个轴旋转时，角动量（angular momentum）L 为

$$(mv)r = (m\omega r)r = mr^2\omega,$$

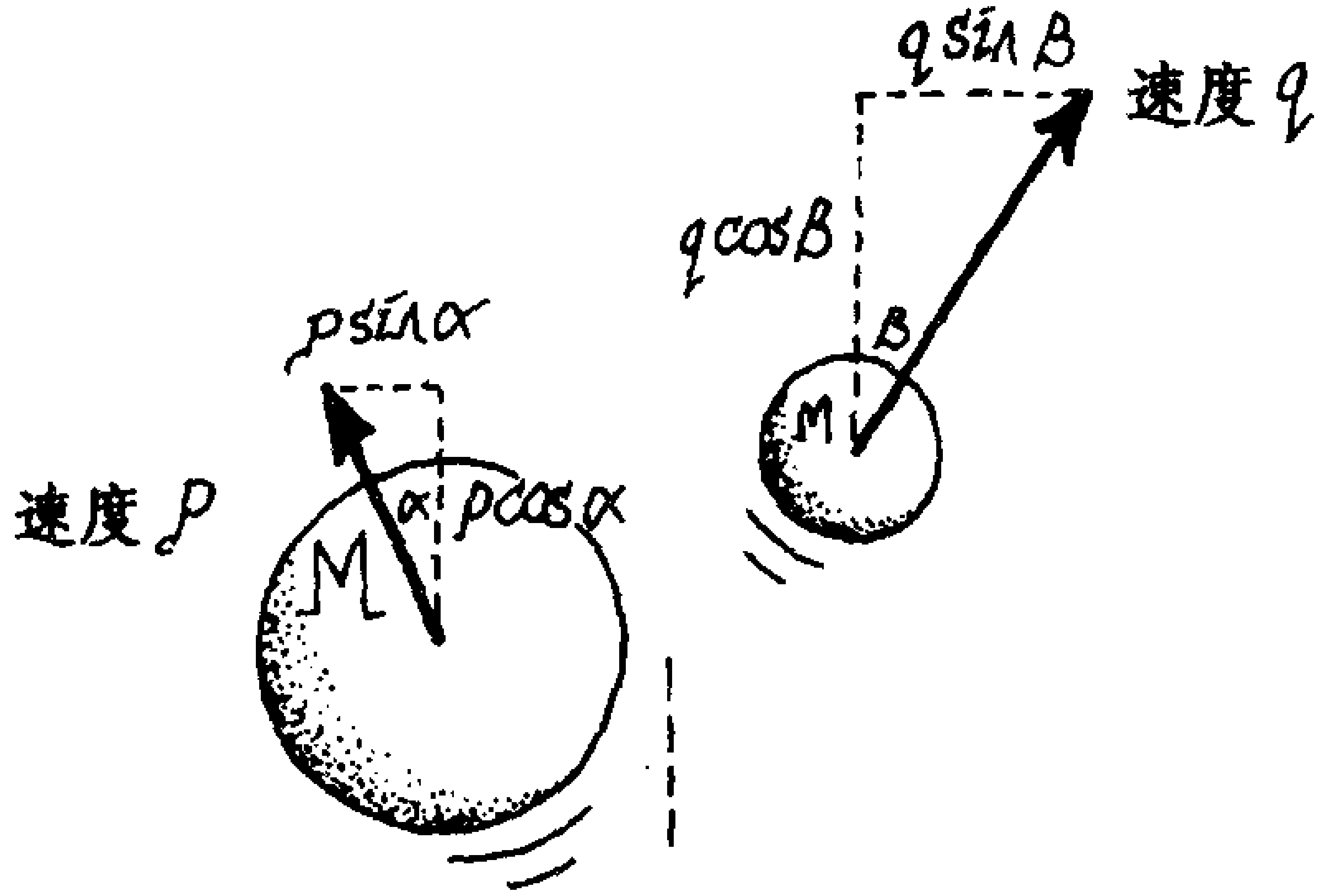
ω 是物体的角速度（angular velovity），单位是 rad/s.

$I = mr^2$ 是所谓的转动惯量（moment of inertia）. 一个系统的转动动能（rotational kinetic energy）是

$$E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

而一般实心的转动物体，可以视为一个具有质量的点，以适当的回转半径（radius of gyration）对着同一个轴旋转. 第 61 页的旋转物体回转半径，可用微积分来计算（参见第 94 页）.

若一个系统没有外力作用，总动量永远守恒.

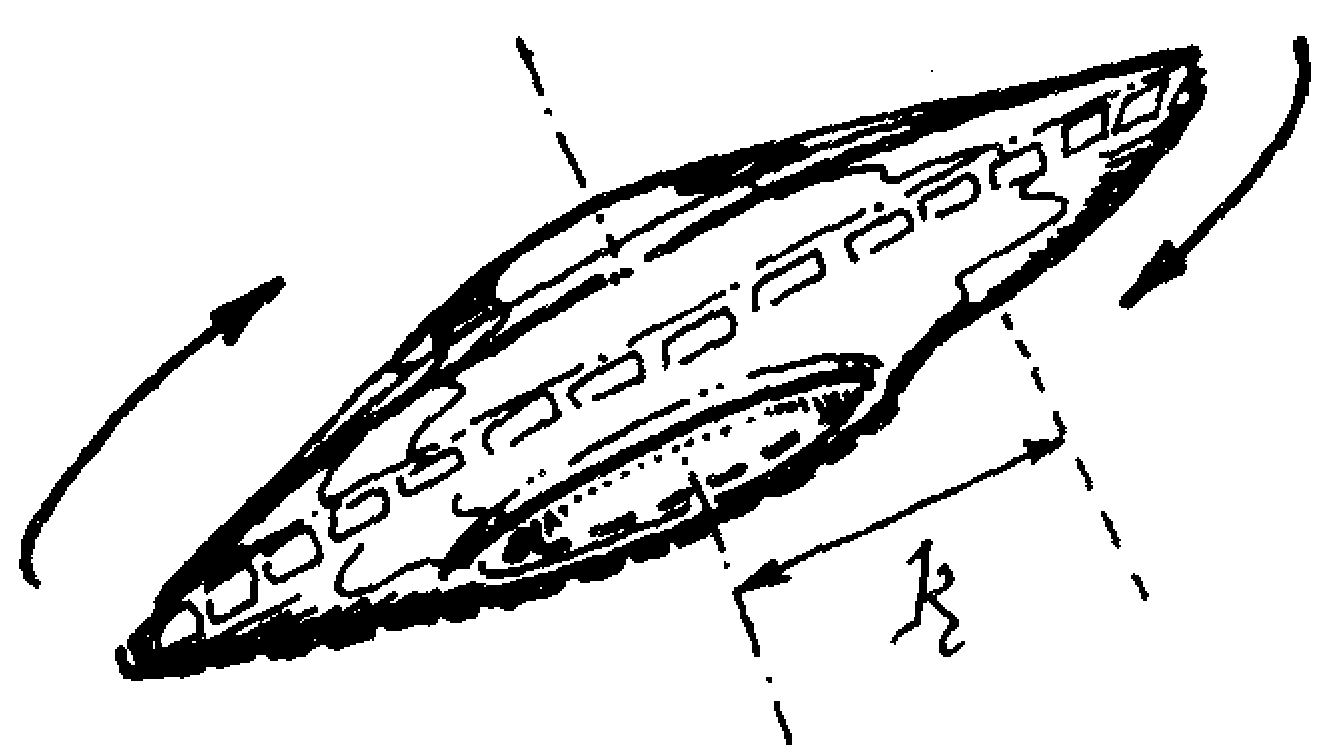


3.

由于线动量也是守恒的，因此

$Mp\sin\alpha - mq\sin\beta = 0$（水平分量）

$Mp\cos\alpha + mq\cos\beta = MV$（垂直分量）



一个绕轴旋转的物体，转动惯量为 $I = \sum Mr^2 = \int r^2 dM$

以角加速度 α 来表示力矩：$T = I\alpha$

又 M 是总质量，而 K 是回转半径，则 $I = MK^2$

转动与平衡

一个质量为 m 的物体绑在长度 r 的绳子上，以速度 v 旋转，则有个朝向圆心的向心力 F：

$$F=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2 r,$$

而加速度为

$$a=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r,$$

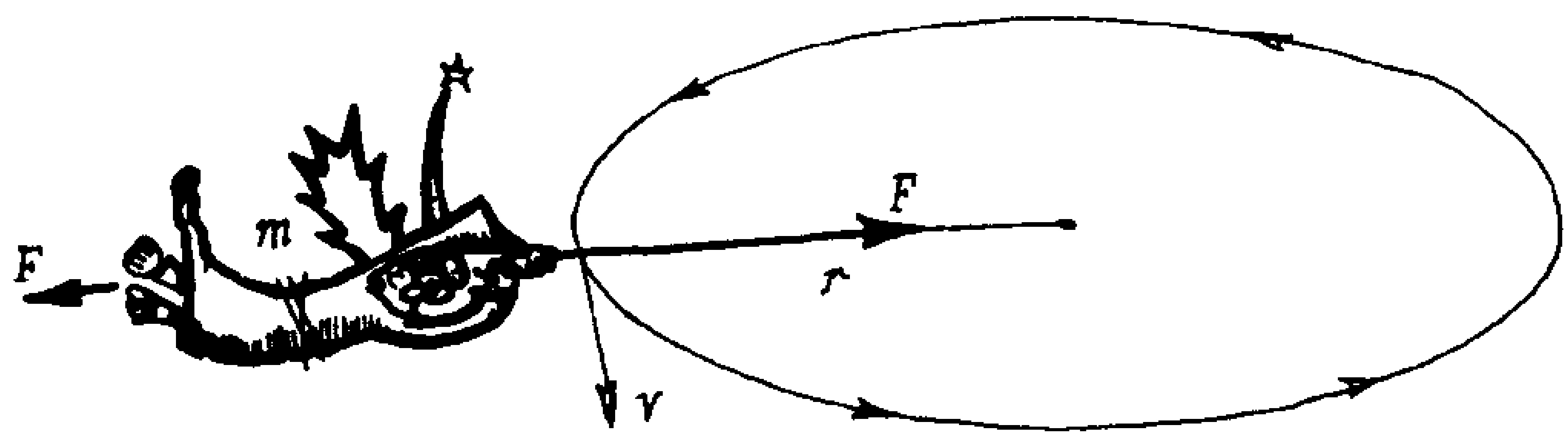
ω 是所谓的角速度．另外还有一个方向相反、大小相等的绳子张力（tension），也看做一种力．

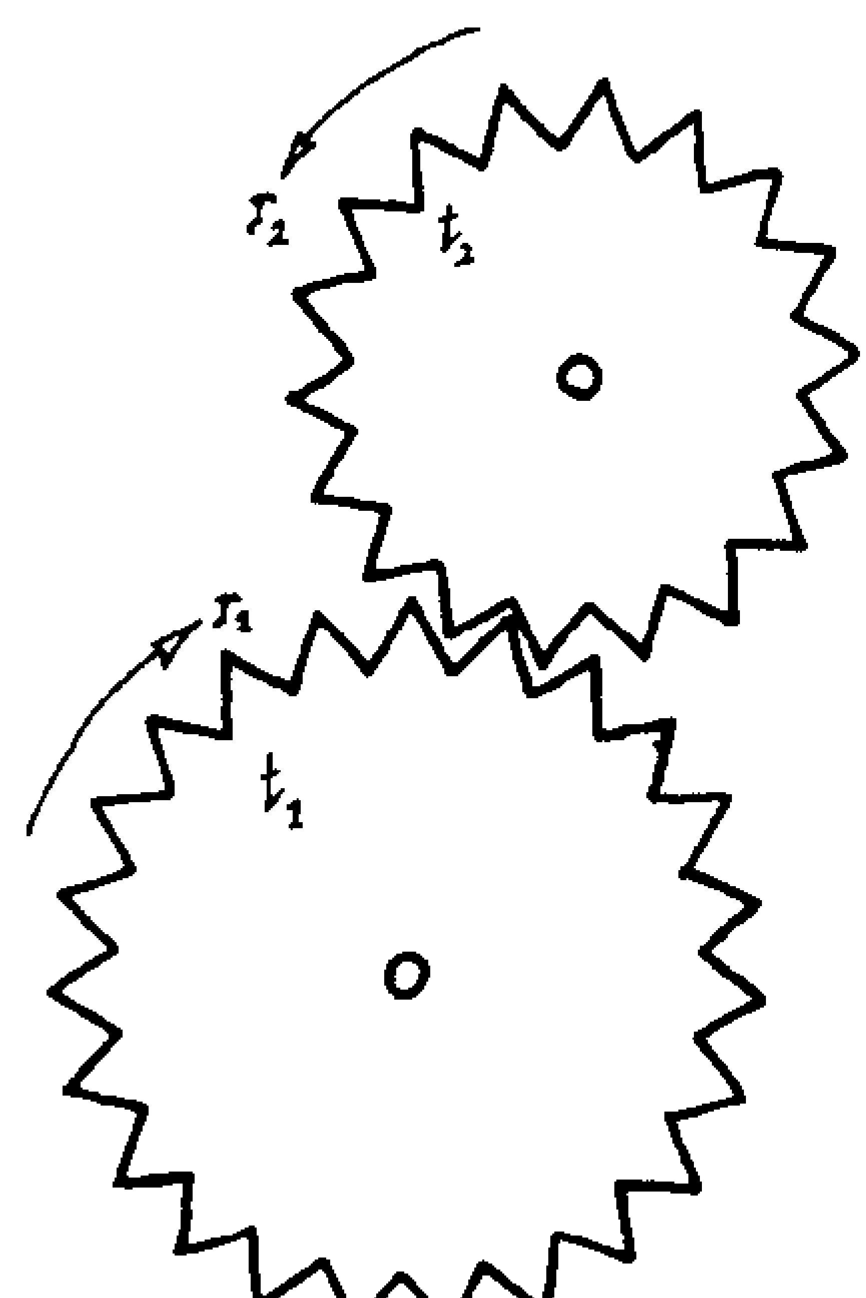
两个相互连接的齿轮，齿数分别为 t_1 及 t_2，速率分别为 r_1 及 r_2〔单位是 r/min（revolutions per minute），每分钟转数〕，则它们之间的关系如下：

$$t_1 r_1 = t_2 r_2$$

或

$$r_1=\frac{t_2}{t_1}r_2,\quad r_2=\frac{t_1}{t_2}r_1.$$


F
m
F
r
v

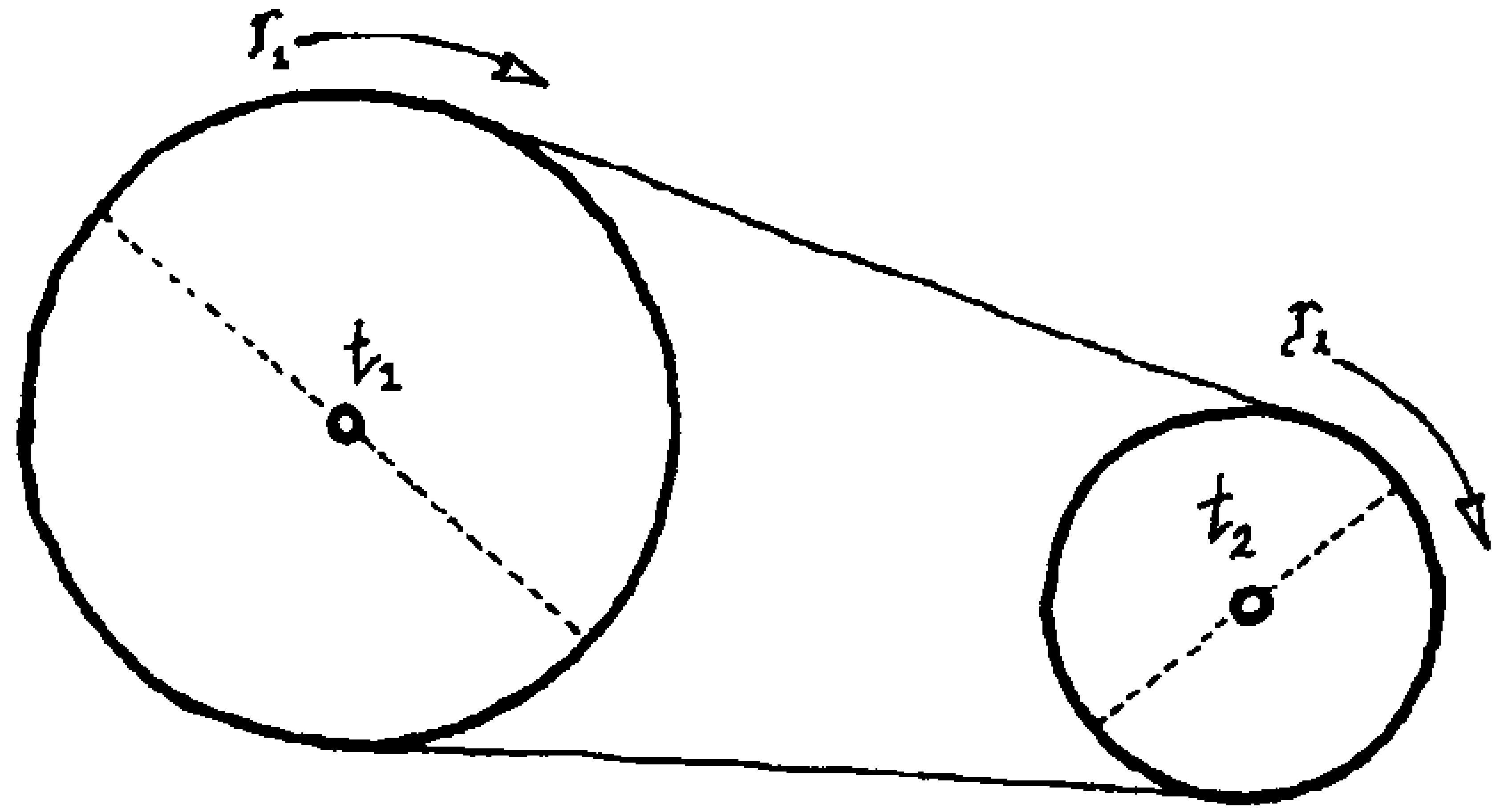

r_2
t_2
r_1
t_1

前页的公式也可适用于以皮带相连的两个滑轮，其直径分别为 t_1、t_2，而速率为 r_1、r_2 时.

如果有两个质量为 m_1 及 m_2 的物体，能如右页下图那样在杠杆上保持平衡，而它们与支点的距离分别为 d_1 及 d_2，则此两物体的力矩必定相等. 力矩是力与径向距（radial distance）的乘积：

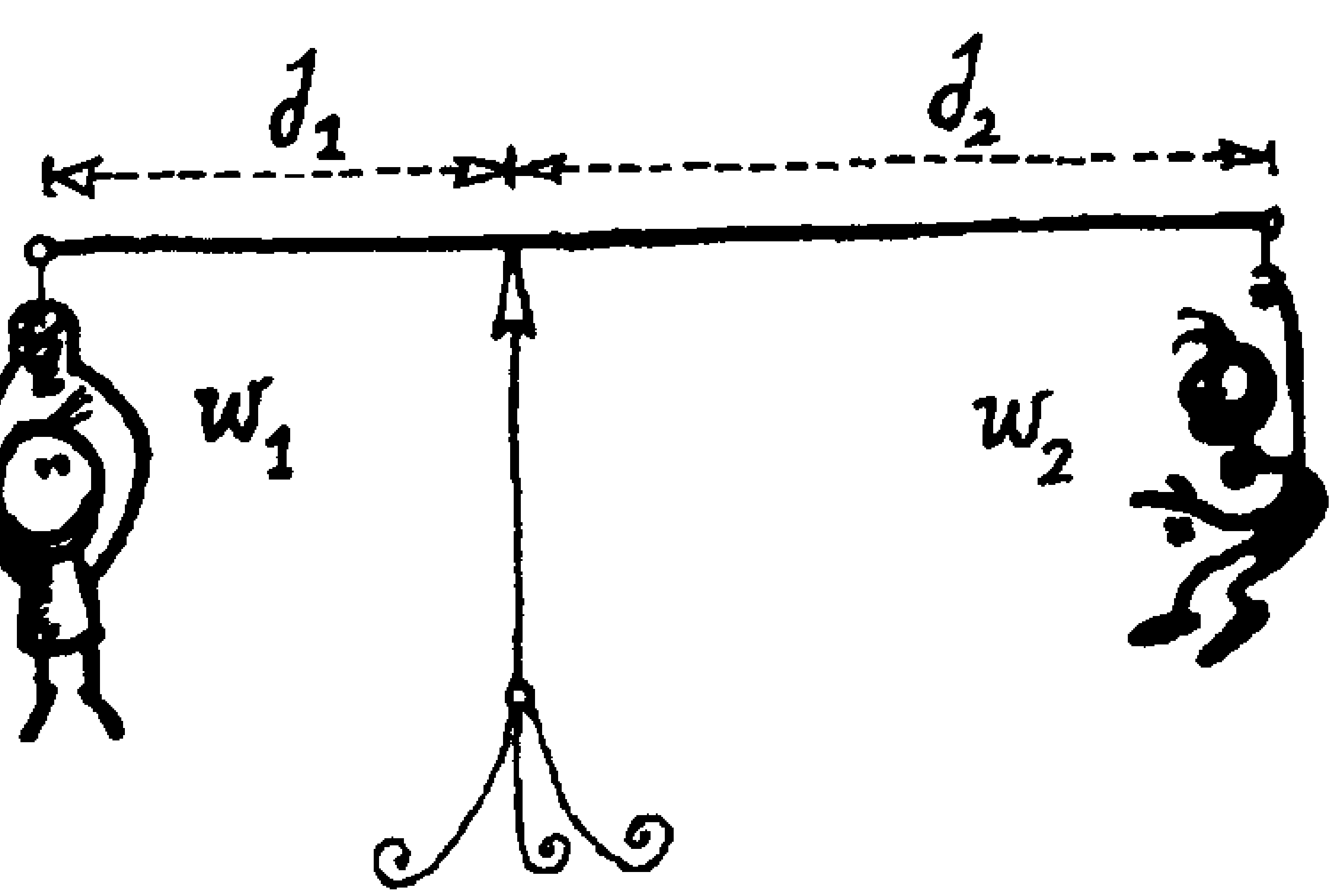
$$d_1 m_1 g = d_2 m_2 g .$$

长柄的扳手比短柄扳手更容易转动螺帽，就是因为长柄扳手产生的力矩较大的缘故.



若 $t_1 = 23$ 和 $t_2 = 18$,

则 $r_2 = \frac{23}{18} r_1$



SIMPLE HARMONIC MOTION 简谐运动

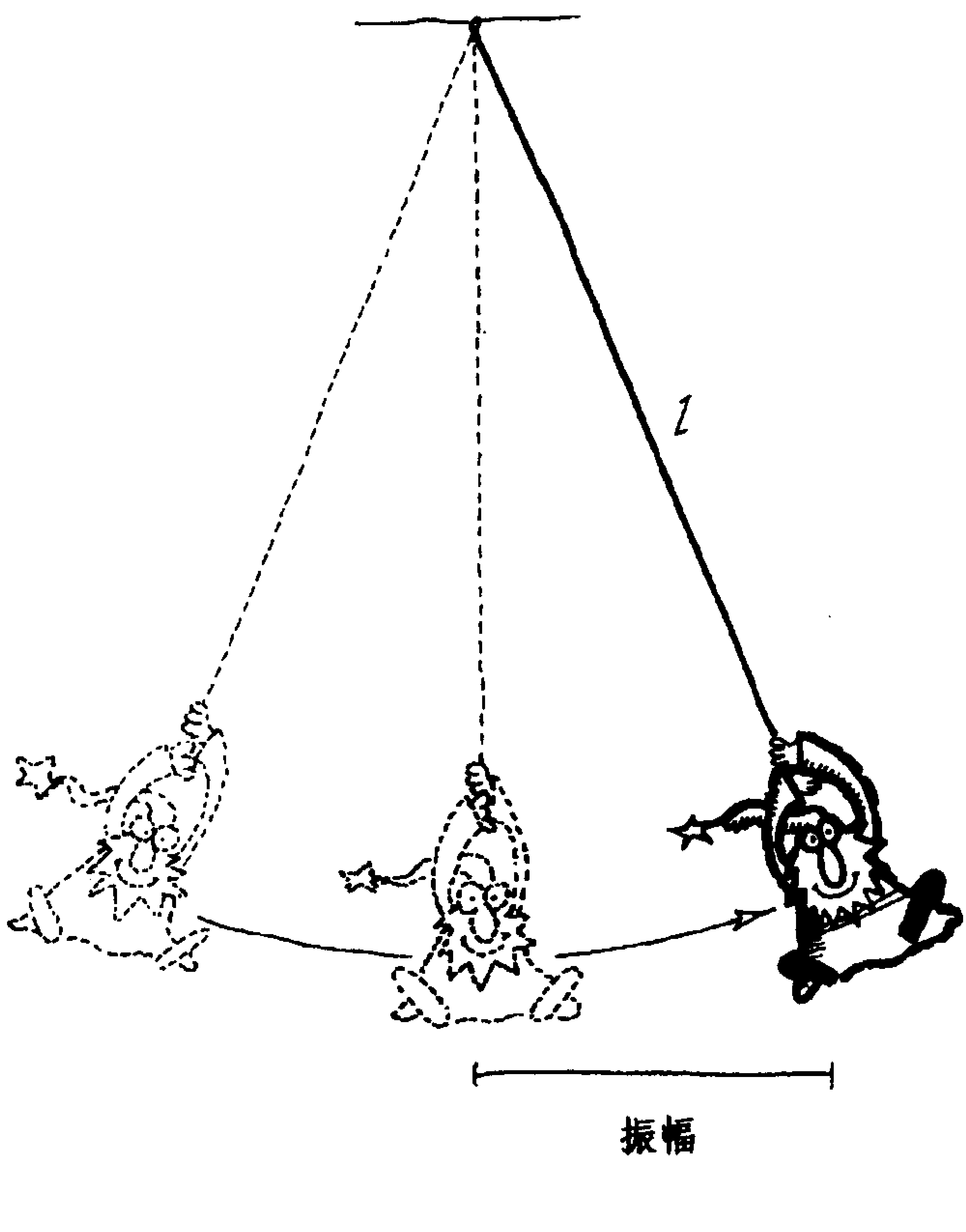
一个单摆，从一端摆到另一端，再摆回原位置所历经的时间称为周期 T，而离中心点最远的距离则称为振幅. 伽利略（Galileo Galilei，1564～1642，意大利天文学家、物理学家及数学家）发现，单摆的周期与振幅无关，只受摆长影响. 因此，若摆长固定为 l，则不管振幅的大小，单摆每秒所完成摆动的次数都是 f，即所谓单摆的频率.

若 l 的单位是米，T 用秒表示，则

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{1}{f},$$

g 是重力常数（见第 54 页）.

在单摆摆动很小的时候，譬如说小于 5°，单摆的摆动会接近于简谐运动(simple harmonic motion，s. h. m.). 跳动的弹簧也做简谐运动，其中包括了大量的振动与振荡现象.


l
振幅

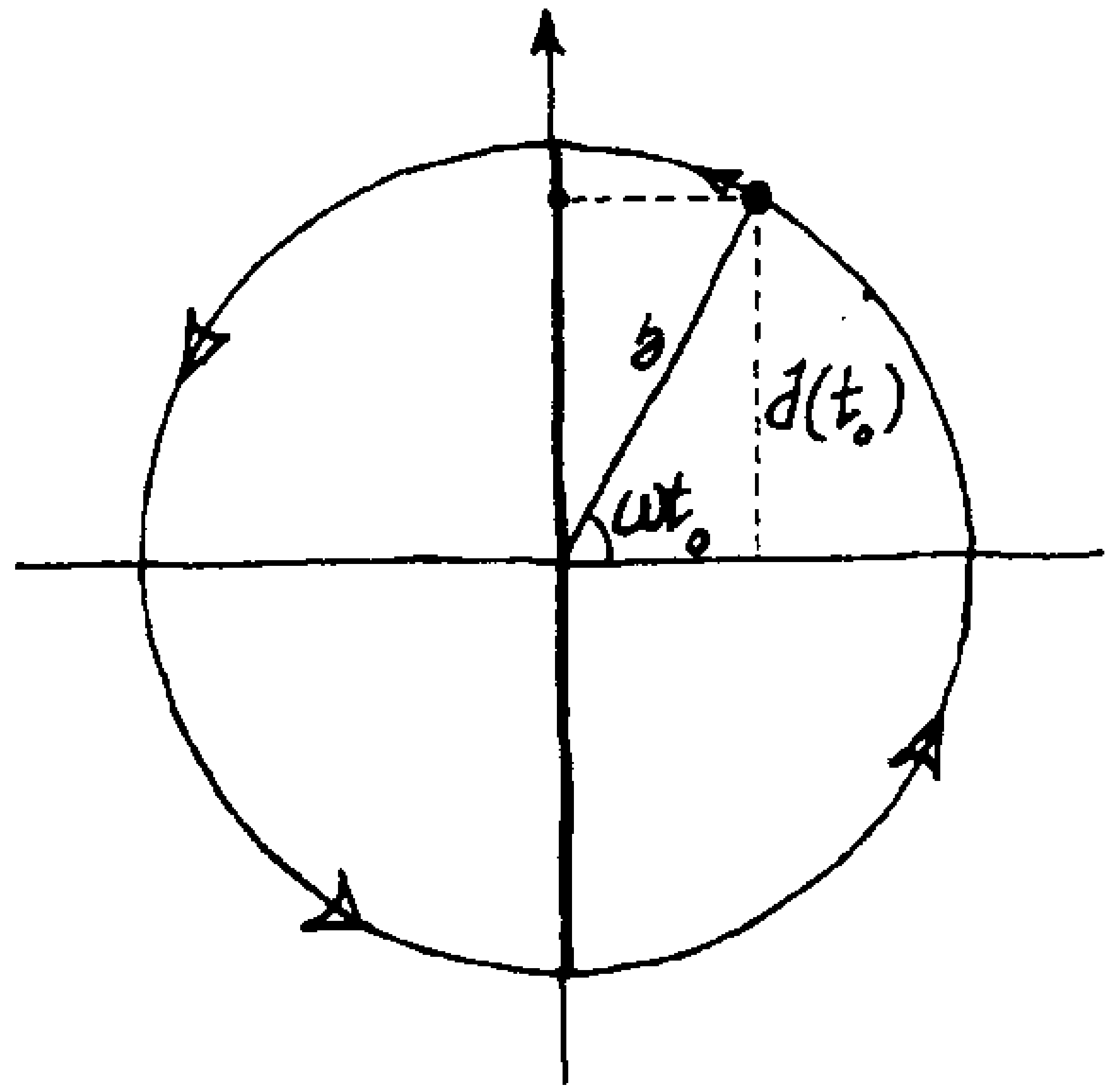
在简谐运动里，物体的势能与动能一直在改变，当它的动能与速度减到最低的时候，势能与加速度最大，反之亦然.

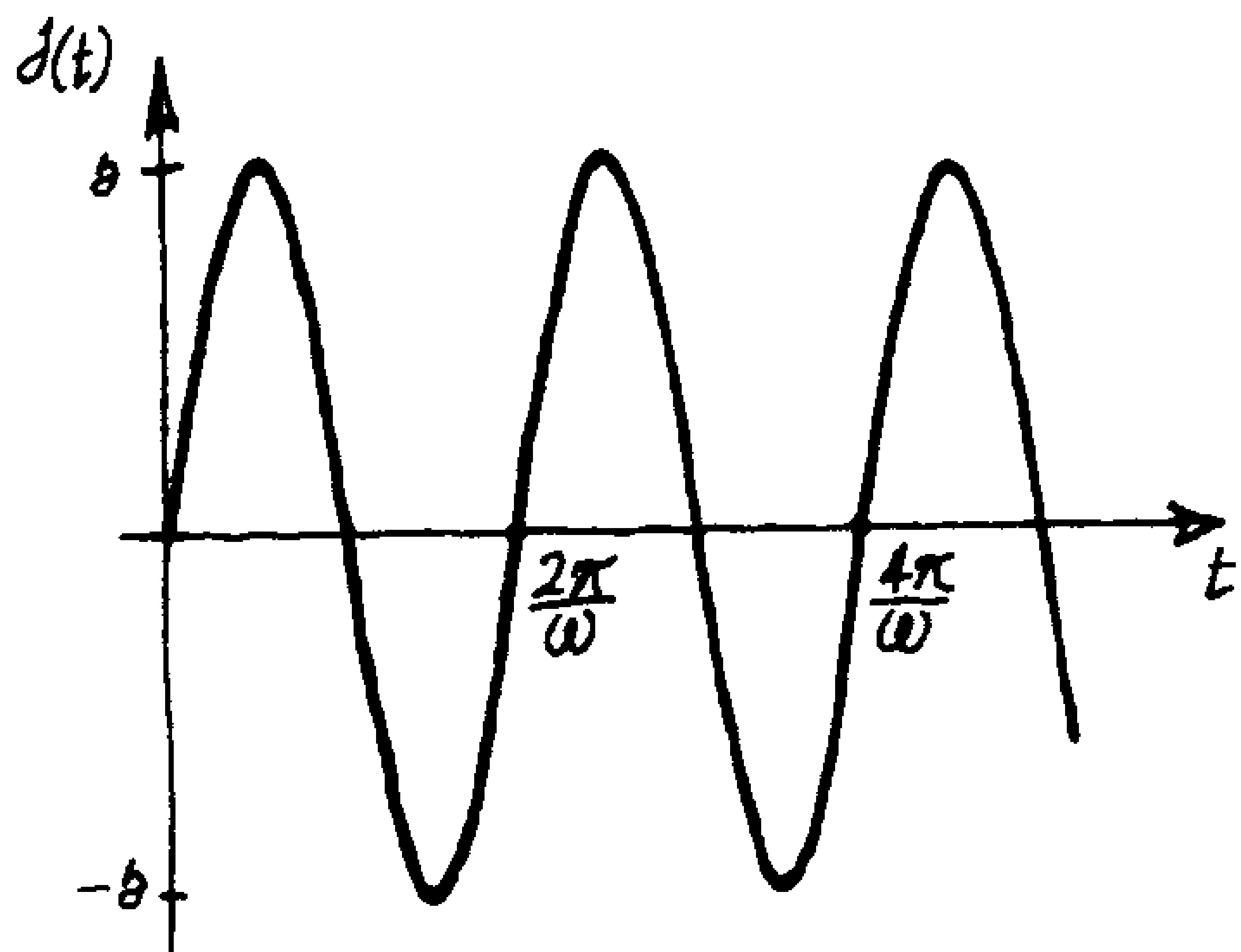
产生简谐运动最简单的办法，就是像右页，让一个物体绕轴做等速圆周运动. 令

$$d(t) = a\sin\omega t,$$

a 是振幅，而 ω 是角速度. 因此，周期是$\frac{2\pi}{\omega}$秒，而频率是周期的倒数，为每秒$\frac{\omega}{2\pi}$圈.

若把做等速圆周运动的点投射在一个垂直轴上，则会产生一个非等速的上下振荡运动，刚好与正弦函数有关.


ℨ
ℨ(t₀)
ωt₀


ℨ(t)
ℨ
-ℨ
2π/ω
4π/ω
t

应力、应变与热

当材料被拉伸或挤压时，形状会改变. 材料的单位面积 A 上所受的力 F，定义为应力（stress）σ；而相对于原来长度 l_0 的长度改变量 Δl，则定义为应变 ε（strain）. 因此，此材料的杨氏模量 E（Young's modulus）是：

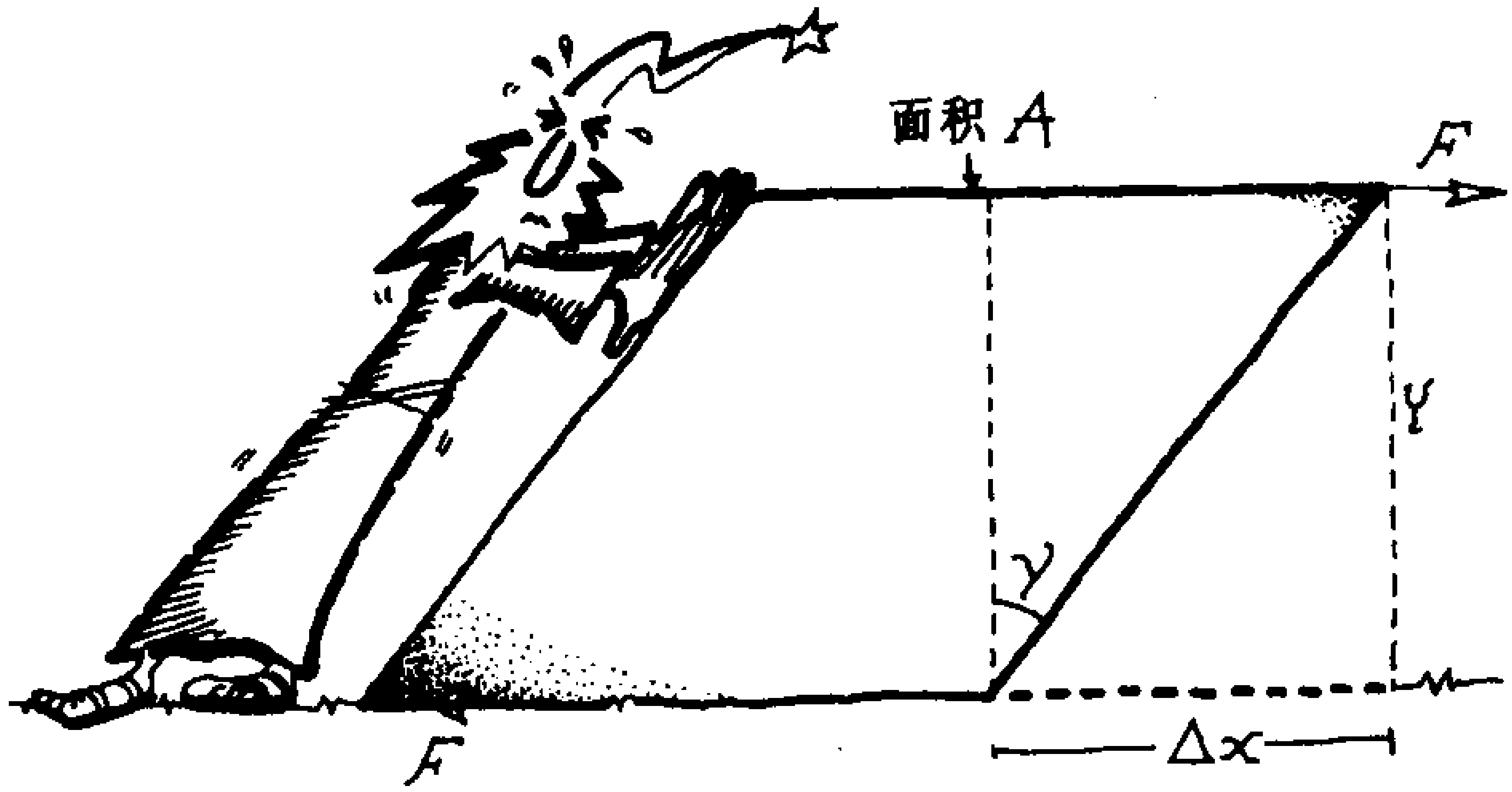
$$E=\frac{\text{应力}}{\text{应变}}=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{F/A}{\Delta l/l_0}.$$

材料也具有体积弹性模量 K（bulk modulus），它与体积的可压缩性（compressibility）成反比. 另外，还有个剪切模量 G（shear modulus），则是剪应力与剪应变的比值（见右页图）.

物质加热或冷却时，会随着温度的增减，成比例地膨胀或收缩. 若线性膨胀率为 α，而温度改变量为 ΔT 时，则长度的改变为

$$\Delta l=\alpha l_0\Delta T,$$

其中，l_0 是原来的长度.



$$剪应力 = \frac{切向力\ (\text{tengential force})}{面积} = \frac{F}{A}$$

$$剪应变 = \tan\ (剪切角\ \gamma)$$

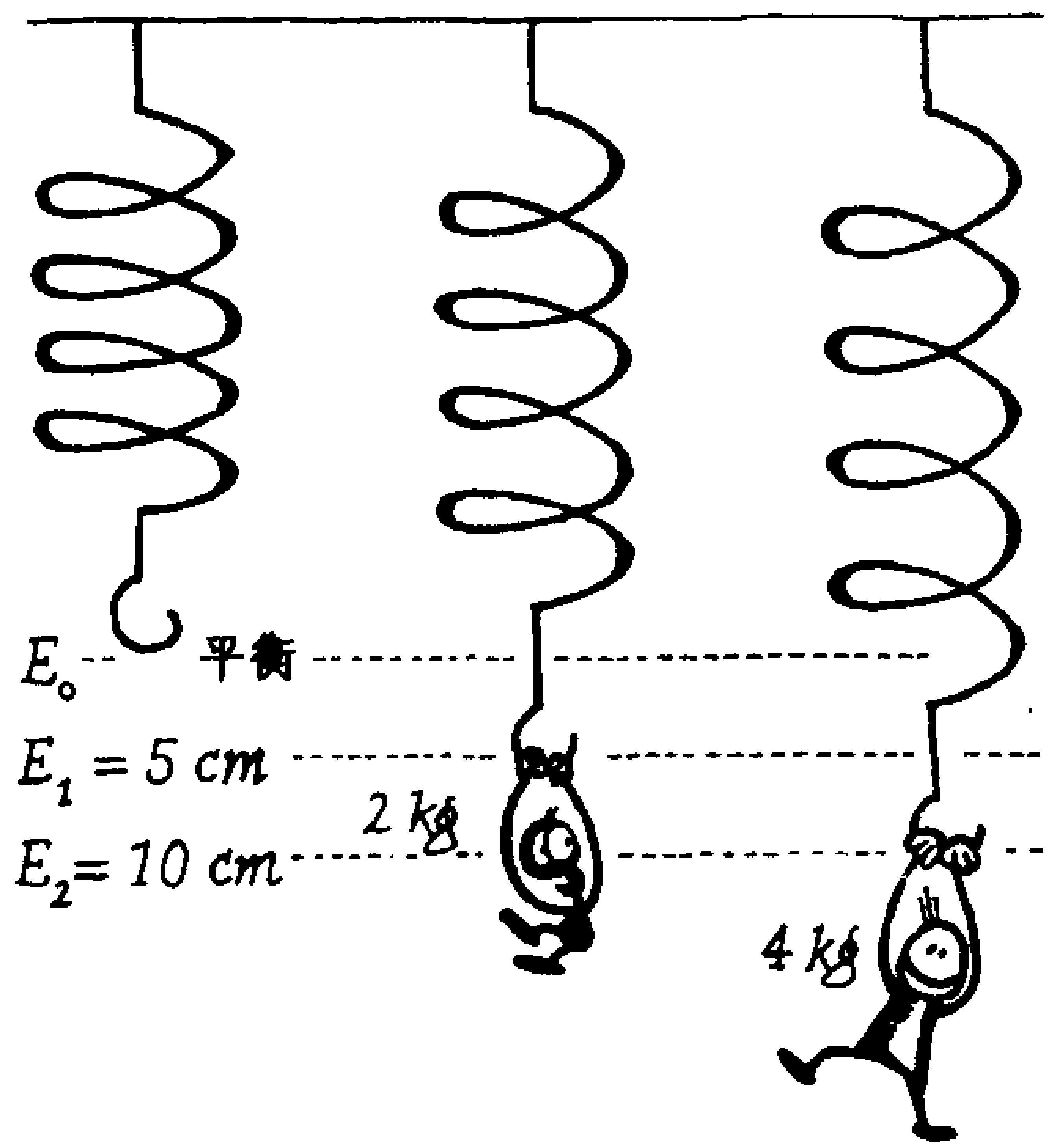
胡克定律说明，若弹簧（或同性质的弹性物质）受到外力，把它从平衡（equilibrium）位置拉伸了 x 单位的长度时，拉伸的长度与外力成正比：

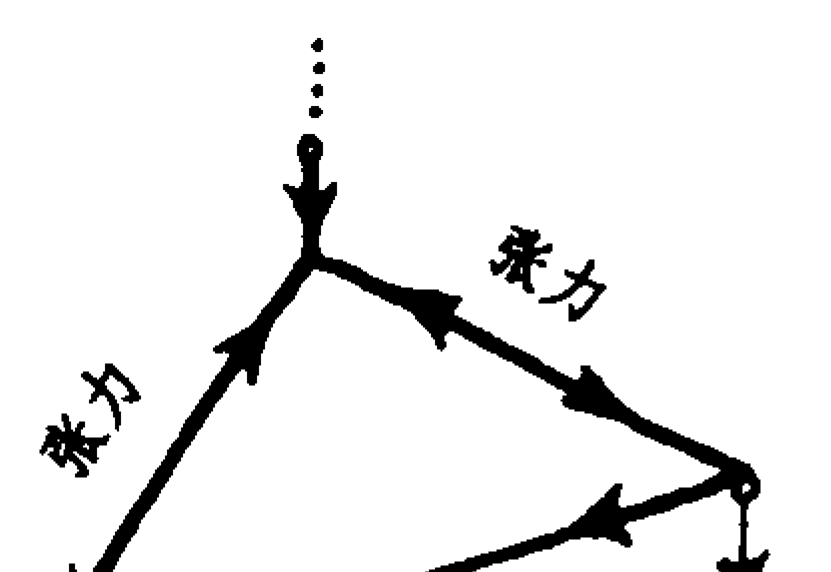
$$F = kx,$$

k 是弹簧的弹性常数. 因此在垂直的弹簧上悬挂物体时，弹簧被拉长的长度与物重成正比.

若 2kg 物体使弹簧伸展 5cm，那么，4kg 的物体将使弹簧伸展 10cm. 在弹簧的弹性限度之内，胡克定律都成立.

如右页下图所示，在任何结构的平衡状态下，任何一点处力的总和，都是平衡的.





在任意一点处，都有一个平衡了的“力的三角形”存在.

温度、压强、流动

液体以速度 v 流过截面积为 A 的管子，则流动率 q（rate of flow）为

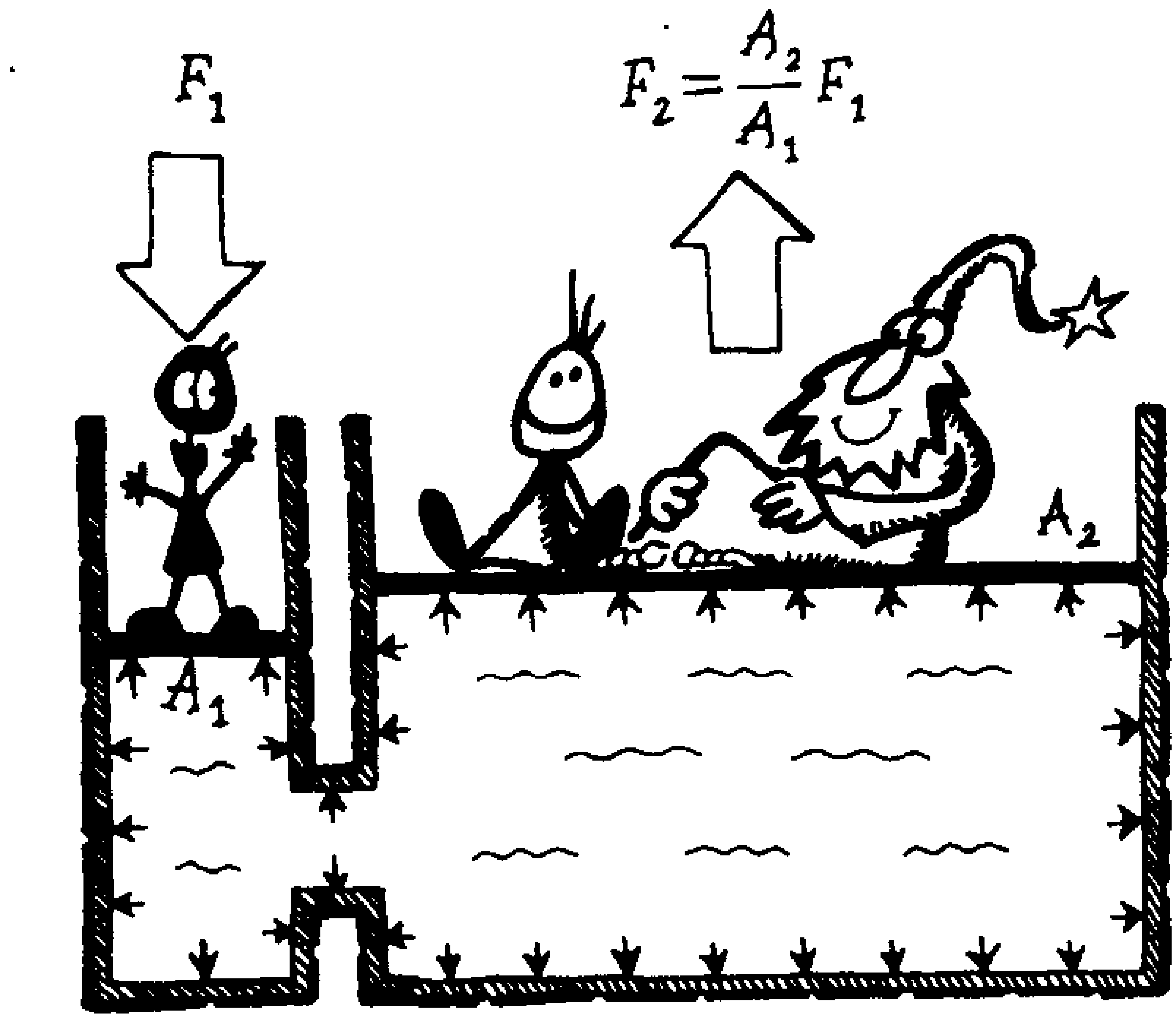
$$q = Av.$$

若液体能流通于两根截面积分别为 A_1 及 A_2 的管子，则两根管子里的液体，都受到了相同的压强，它们的流速将会是 v_1 及 v_2，并有以下的关系：

$$A_1v_1 = A_2v_2.$$

帕斯卡原理（Pascal's principle）指出，对一个盛有液体的密闭、任意形状容器施压，压强（pressure）会均匀传递到容器的所有角落. 压强是指每单位面积上所受到的力，在右页图的例子里，

$$F_1A_2 = F_2A_1.$$



密闭、任意形状容器内的液体压强，会均匀传递、遍布于整个容器内．这便是帕斯卡原理，也是水力学的理论基础．

伯努利方程（Bernoulli's equation）说明，液体高度的改变会导致压强的改变：

$$P_1 + h_1\rho g = P_2 + h_2\rho g.$$

至于气体，理想气体定律（Perfect Gas Law）指出，若定量气体的压强是p、体积为V，而温度为T（以开氏温度表示）时，pV与T成正比．开氏（Kelvin）温度用于绝对温度的度量：

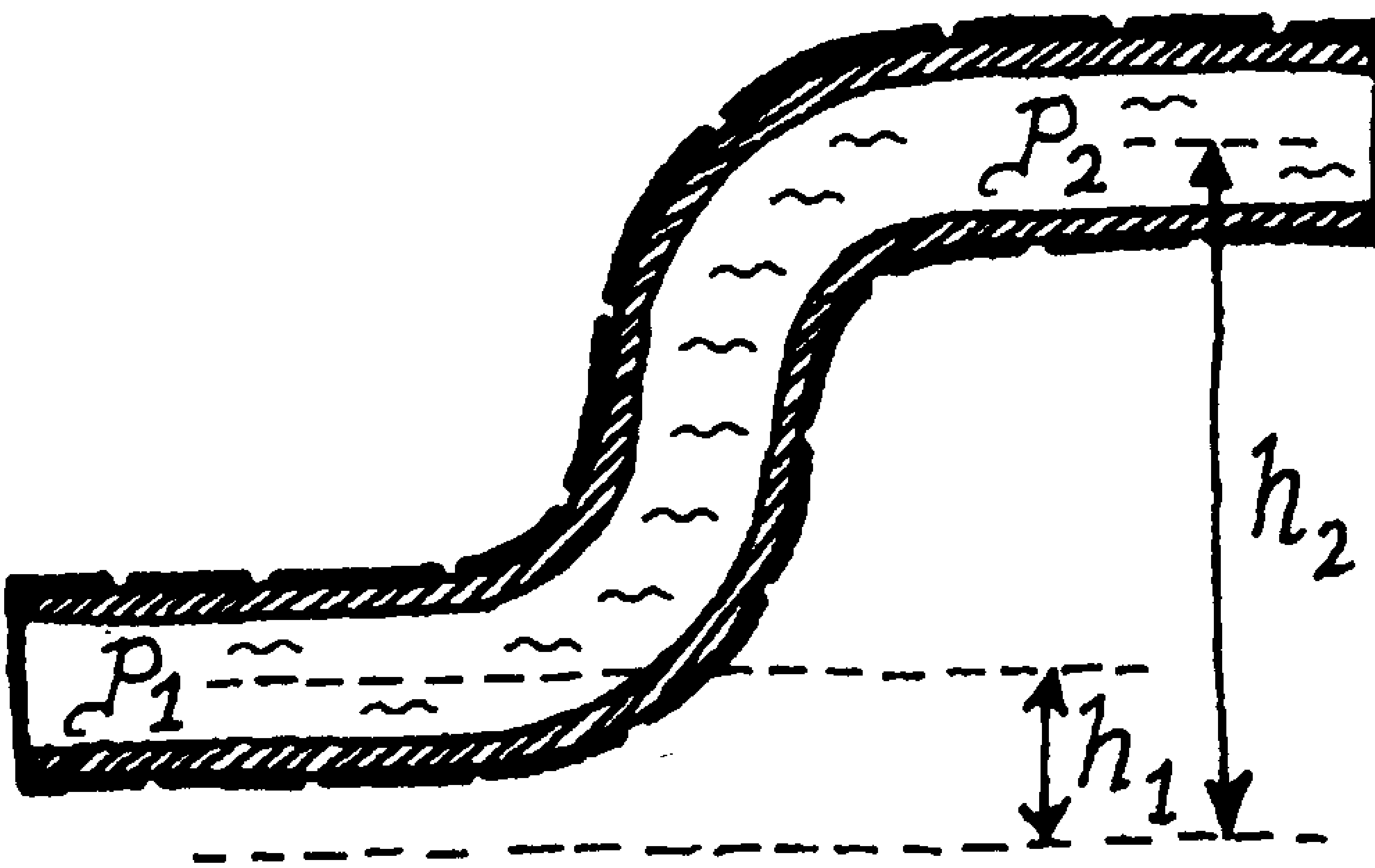
$$T = t + 273.15\text{K}，其中\ t\ 为摄氏温度.$$

已知一个密闭系统，初始的压强、体积与温度分别为p_1、V_1、T_1，后来则转变为p_2、V_2、T_2，则：根据查理定律（Charles' law），压强恒定时，

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

根据玻意耳定律（Boyle's law），温度恒定时，

$$P_1V_1 = P_2V_2.$$



此处的ρ是流体的平均密度，可由质量/体积得来．若我们使用单位 g/cm^3（克/厘米^3），则水的密度 $=1g/cm^3$，g 是重力常数．

谐波与呼啸而过的警报器

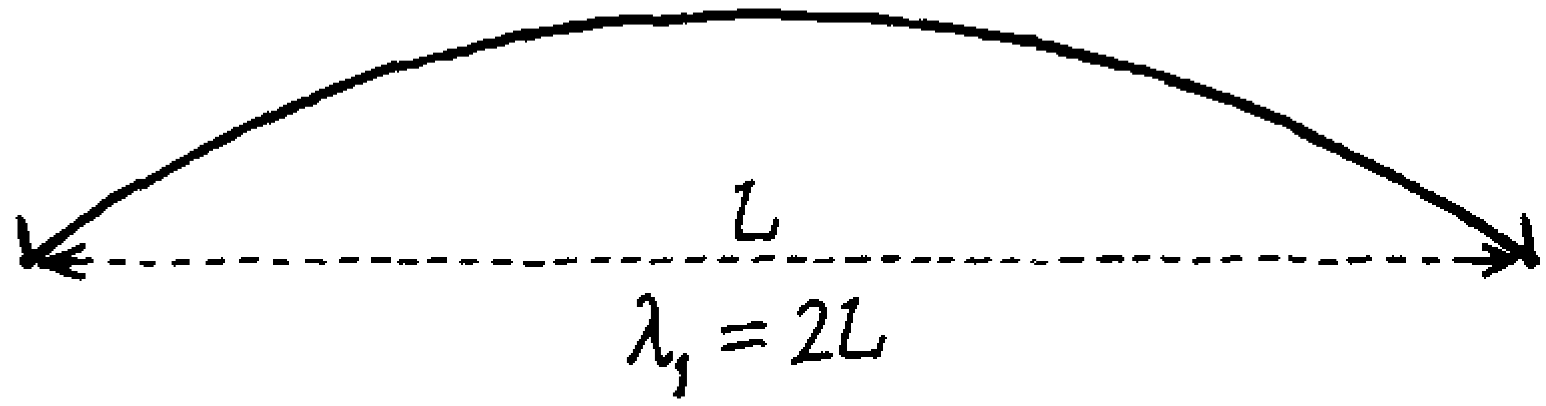
对一根两端固定、长度为 L 的弦线（见右页图）而言，此弦能够产生的谐波波长（harmonic wavelength）为

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

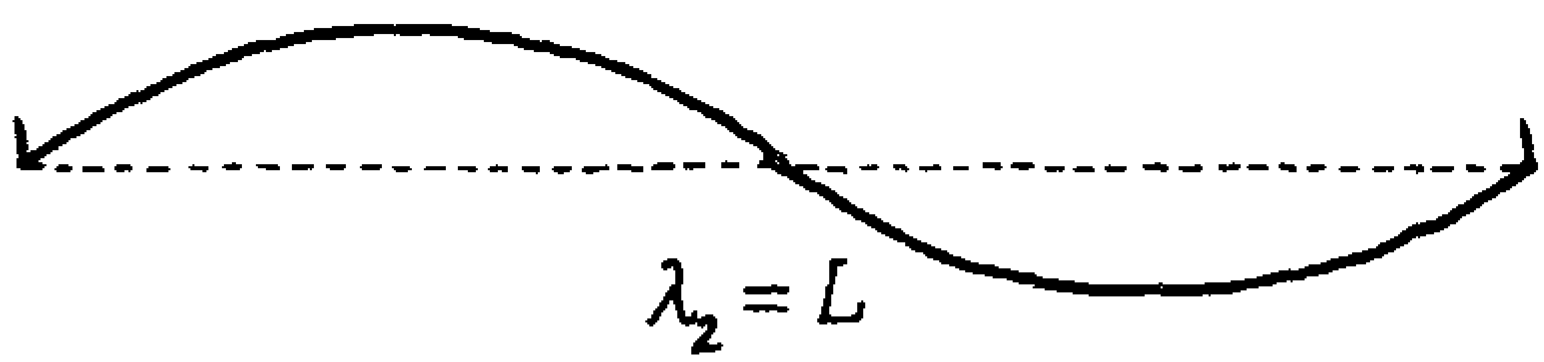
只有波长为 λ_1 的谐音，和前几个泛音（overtone）能够被人耳听见.

若弦的张力是 T（单位为牛顿），单位长度的质量是 μ（kg），而 W_T 是弦的波速，则弦线的几个基本频率 v_n（每秒周数）为

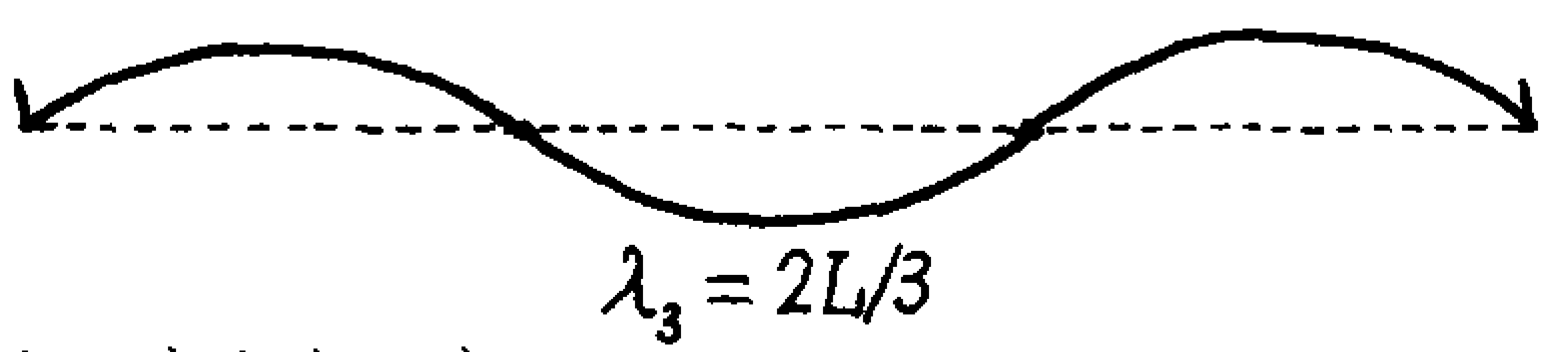
$$v_n = \frac{W_T}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}W_T = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$



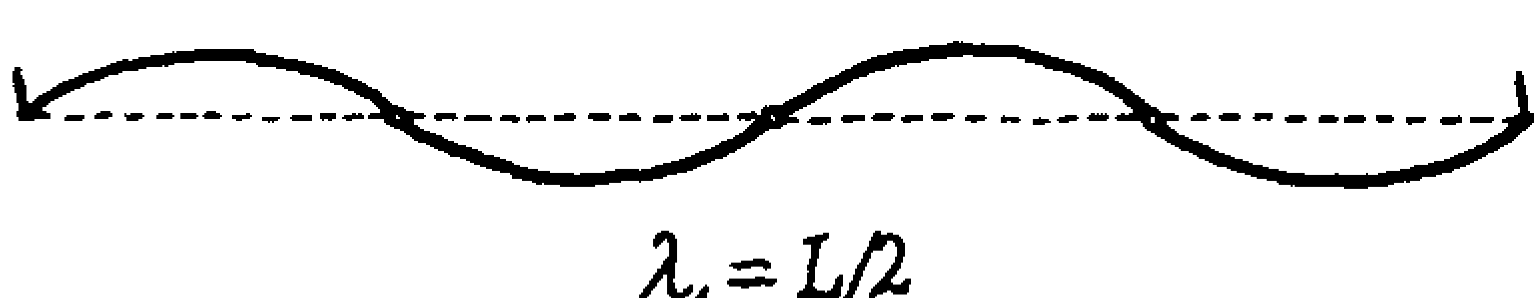
半波



全波，比波长 λ_1 的音高八度



比八度音高五度



两个全波，比波长 λ_1 的音高两个八度

当救护车驶过身旁时，它的警报声会改变，这正是所谓的多普勒效应（Doppler effect）。若观测者以 v_o 的速度向声源移动，而声源本身的速度 v_s、频率 f_s 也正朝着观测者前进时，在波速为 c 的情况下，观测者所听到的声音频率 f_o 会是

$$f_o=\left(\frac{c+v_o}{c-v_s}\right)f_s.$$

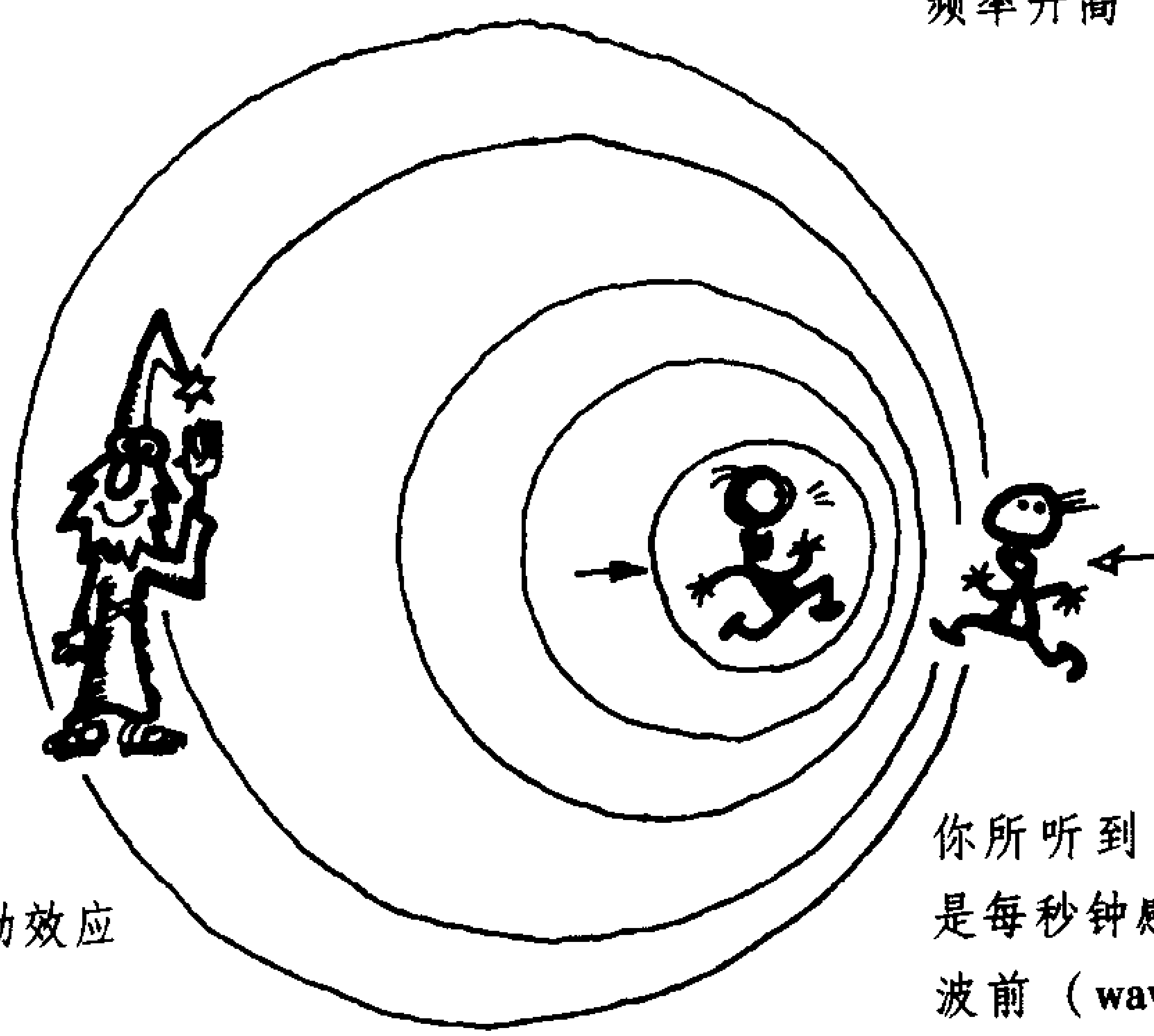
注意，若观测者与声源背道而驰，v_o 及 v_s 需用负值（声波的速度是 331.45 m/s）.

若两种频率分别为 f_1 及 f_2 的声音很相似，且当它们同时发声时，你可能会听到一个拍频（beat frequency）的音：

$$f_{拍}=(f_2-f_1).$$

发声者远离时，频率变低

发声者接近时，
频率升高



多普勒效应

你所听到的频率，
是每秒钟感受到的
波前（wave front）
数目

折射、透镜、相对论

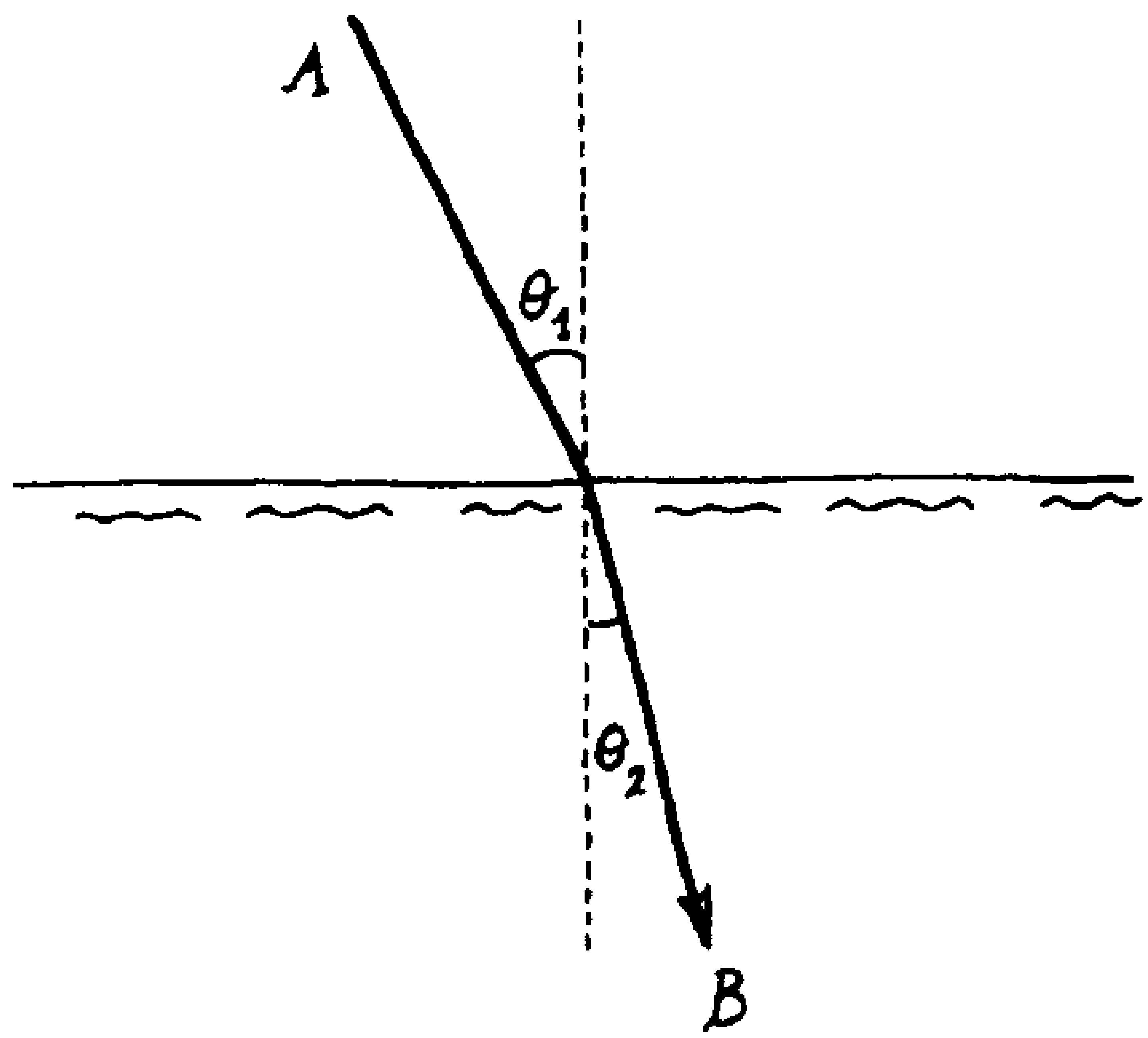
右页上方所示是光从空气进入水中的示意图. 假设光在任何两种介质里的速度分别是 v_1 及 v_2，荷兰科学家斯涅耳（Willebrord van Roijen Snell，1581 ~ 1626）的反射定律（Law of Refraction）指出，对于已知光源的频率，

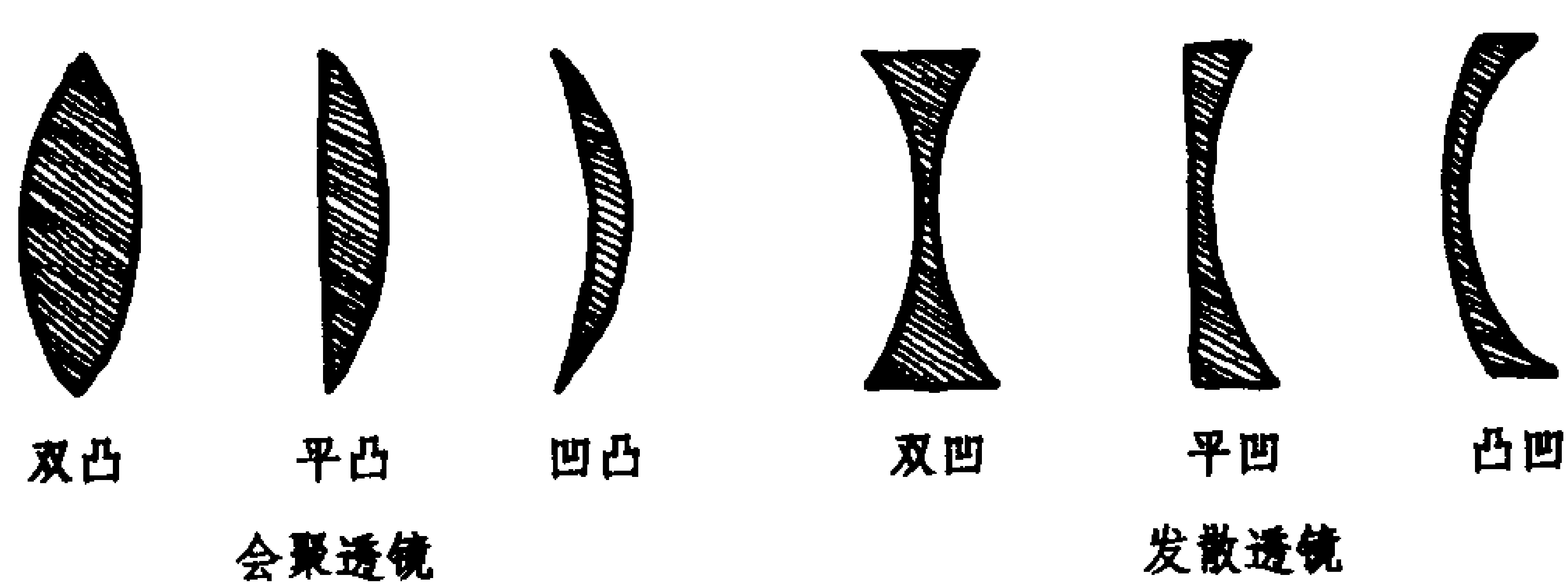
$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\text{常数} \qquad \text{或} \qquad n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 .$$

其中，n_1 与 n_2 分别是两种介质的折射率（refractive index），对不同的光源频率它稍有不同. 这里有几个有用的折射率值：

真空和空气：1
水：1.33
石英（俗称水晶）：1.45
冕牌玻璃：1.52

冕牌玻璃（Crown glass）是钾玻璃中品质特别纯净，硬度较大，熔点较高的一种，适合制造光学仪器.





有些透镜使光会聚，有些使光发散.

右上图所示的凸透镜标示了从焦点至镜心的距离，称为焦距 f（focal length）.

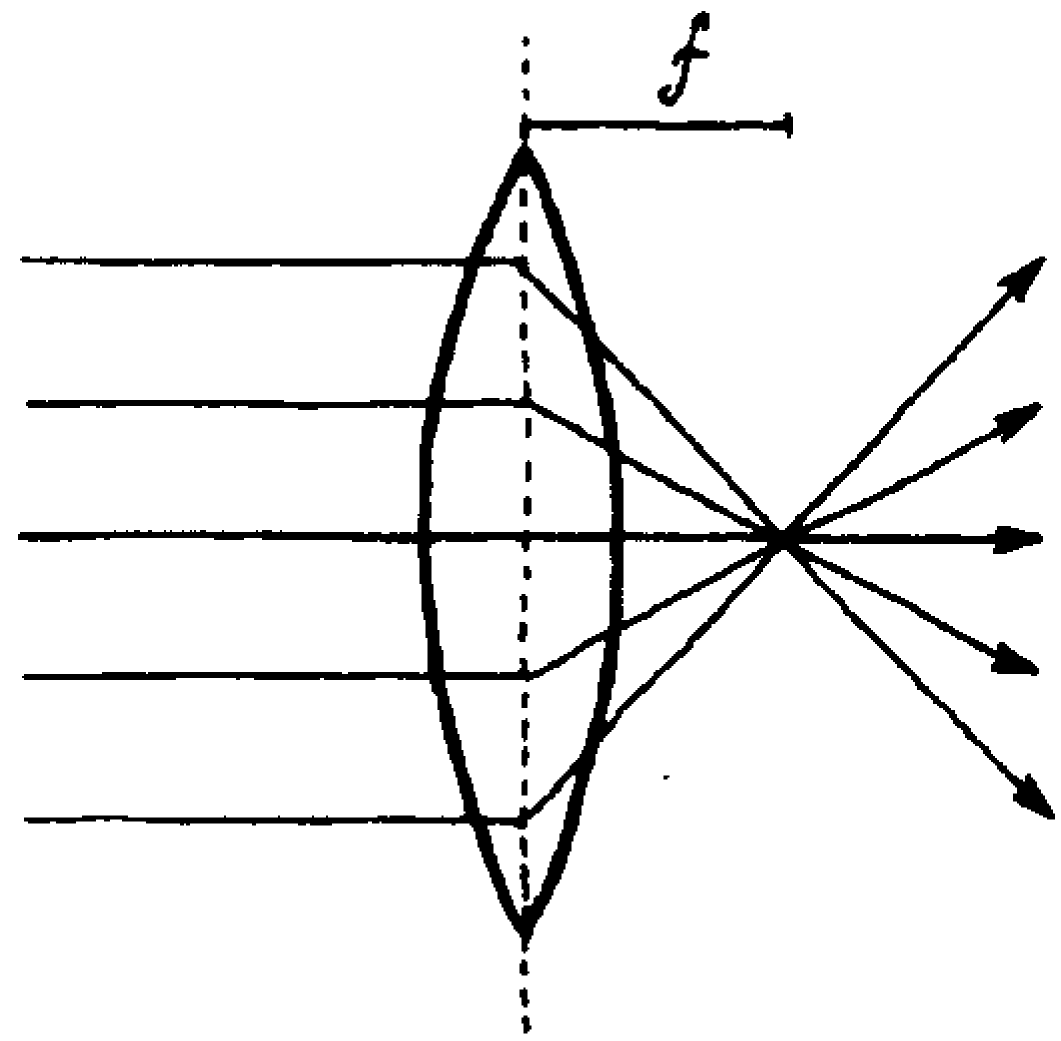
高斯透镜公式（Gaussian Lens Equation）指出物距、像距与倒立实像之间的关系：

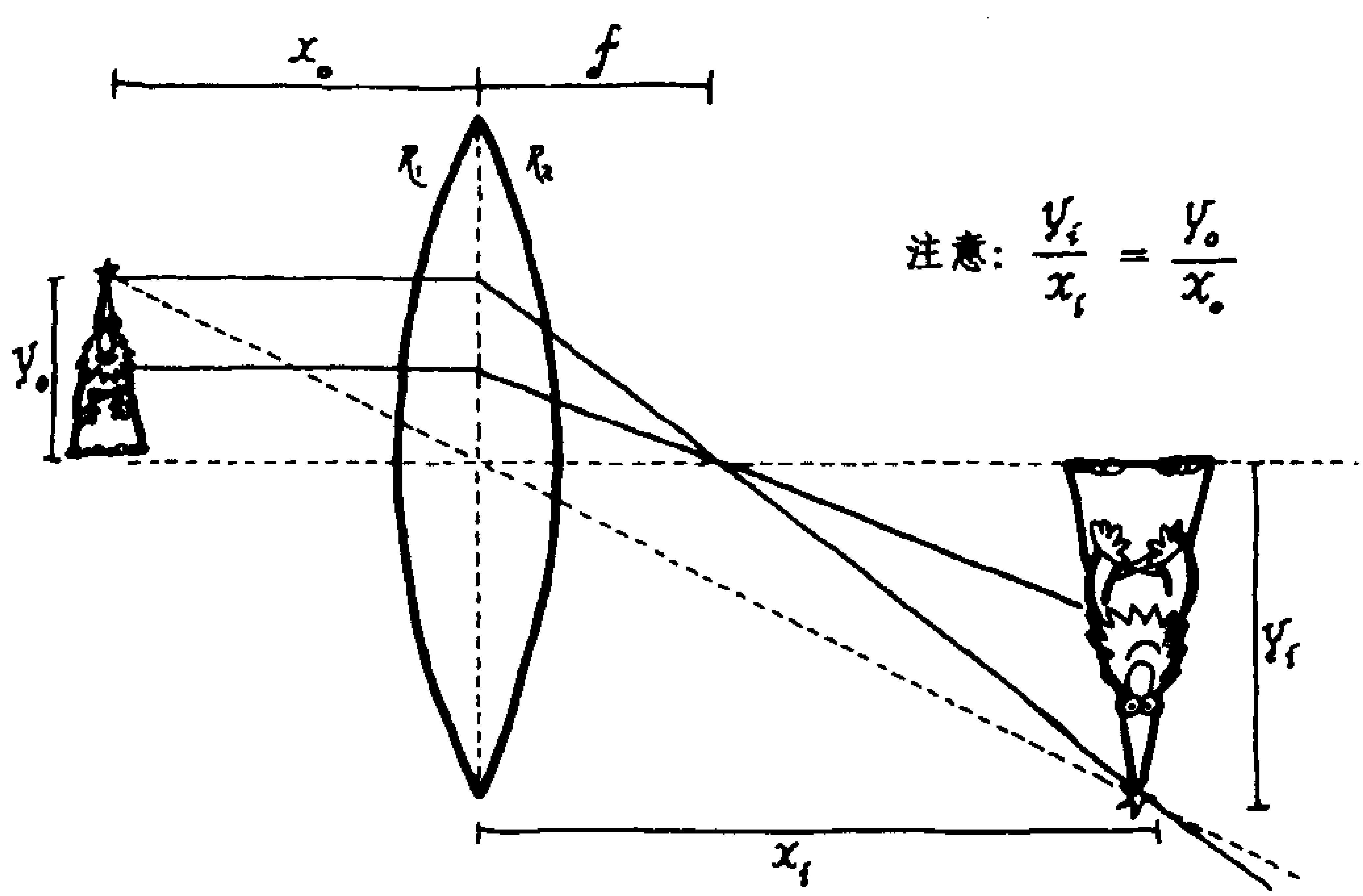
$$\frac{1}{x_o}+\frac{1}{x_i}=\left(\frac{n_{透镜}}{n_{介质}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}.$$

R_1 与 R_2 分别是透镜左侧和右侧的曲率半径（radius of curvature），若换成凹透镜，则为负值.

可见光只是电磁光谱中的一小部分，电磁波还包括 X 射线、无线电波与微波.

爱因斯坦推论，基于光速在任何状况下都是恒定的，当观测者与物体间有相对运动时，观测者会看见物体的时间进行得比静止物体的时间还慢，这就是所谓的时间膨胀（time dilation），是狭义相对论（Special Theory of Relativity）的部分内容.


f


x_o
f
R_1
R_2
注意: $\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_o}{x_o}$
y_o
y_i
x_i

电与电荷

在简单的电路里，通过电阻 R（单位为欧姆）的电压 E（单位为伏特），会产生电流 I（current，单位为安培），这三者之间的关系遵守欧姆定律（Ohm's law）：

$$E = IR.$$

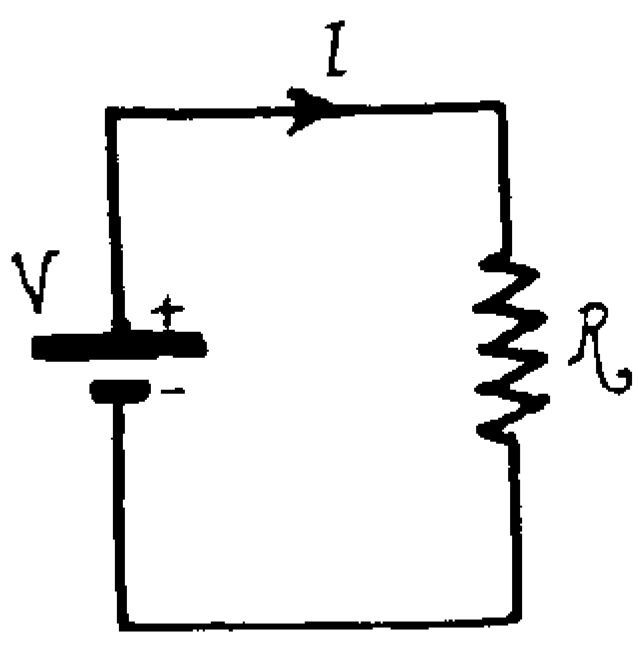
而电路中的功率 P（单位为瓦）则为

$$P = EI = I^2 R.$$

串联的电阻器会得到电阻 $R_s = R_i + \cdots + R_n$（欧）；并联的电容器（capacitor）会得到电容 $C_p = C_1 + \cdots + C_n$（法）. 并联的电阻器或串联的电容器，其电阻与电压值如下：

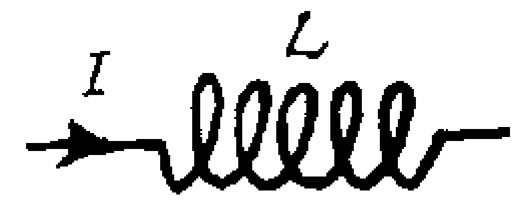
$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}},\quad C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}}.$$

关于电路的公式中，尚有包含电感器（inductor）的，请参见右页.



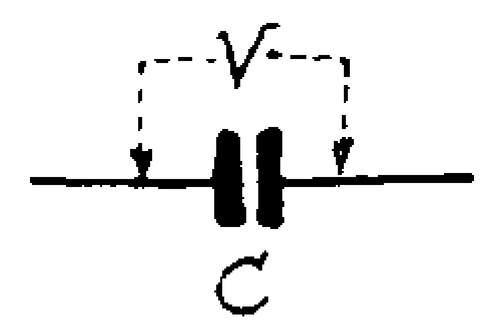
$V=IR$

Energy stored



能量储存于电感里:

$=\frac{1}{2}LI^2$



电容里:

$=\frac{1}{2}CV^2$

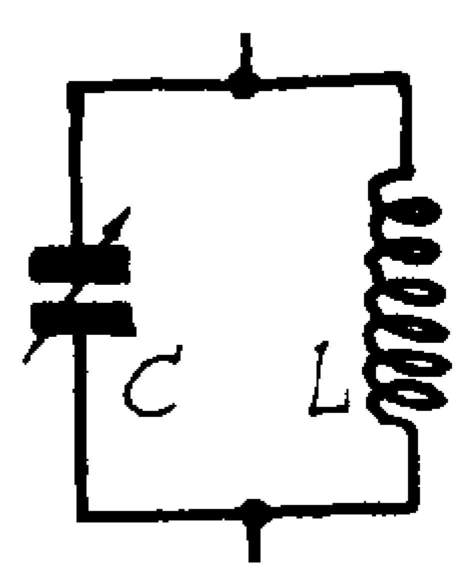
调频

tuned frequency

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

并联共振电路

可变电容



电压峰值与调频有关

串联共振电路

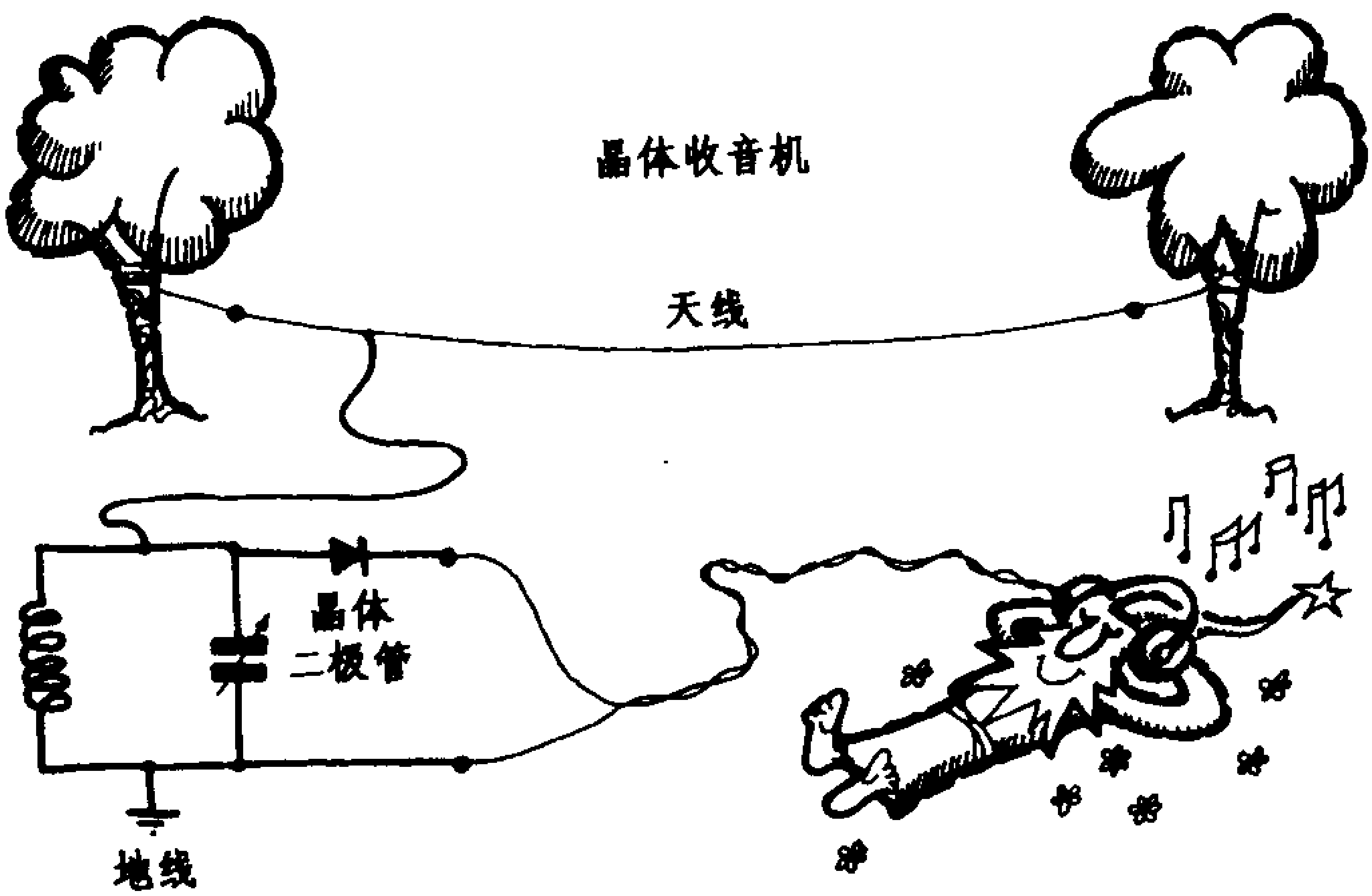
电流峰值与调频有关

所有的电效应都是因为有电荷［charge，单位是 C（库仑）]．一个电子的电量是 -1.6×10^{-19}C（库仑）．库仑定律（Coulomb’s law）说明，若两个点电荷的电量分别为 Q_1 与 Q_2，距离为 r，则彼此间的作用力 F 为

$$F=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2},$$

其中的 ε_0 值，等于 8.85×10^{-12}F/m（法/米），乃真空中的电容率（permittivity）．

在微观宇宙（microcosm）的范畴里，库仑力将电子束缚在原子核附近，形成原子．原子与原子构成了分子，而分子与分子的组合，就构成了固体与液体．


晶体收音机
天线
晶体
二极管
地线

电荷、通量、左右手定则

电磁场与重力场有很强的类似性；电磁场中电荷的角色，就有点儿像重力场里的质量. 在强度为 E 的电场里，电荷 Q 所受到的力 F 为

$$F = EQ.$$

一段长度 l、带电流 I 的导线，在磁通密度 B（magnetic flux density）的磁场里，所受到的力 F 为

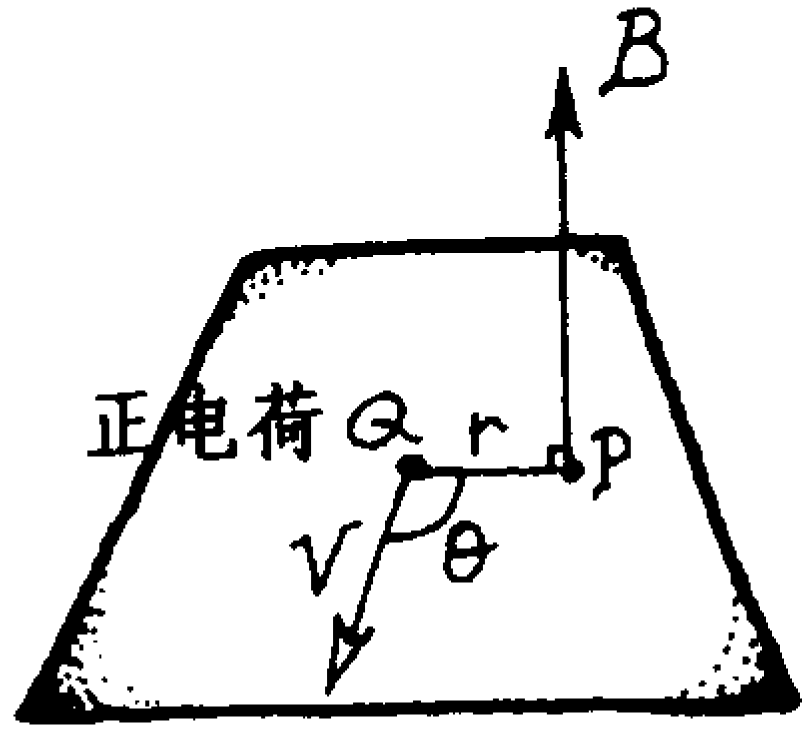
$$F = BIl,$$

B 的单位是特斯拉（T）. F 也与 B 一样，在磁场里的每一点上，都有方向与强度.

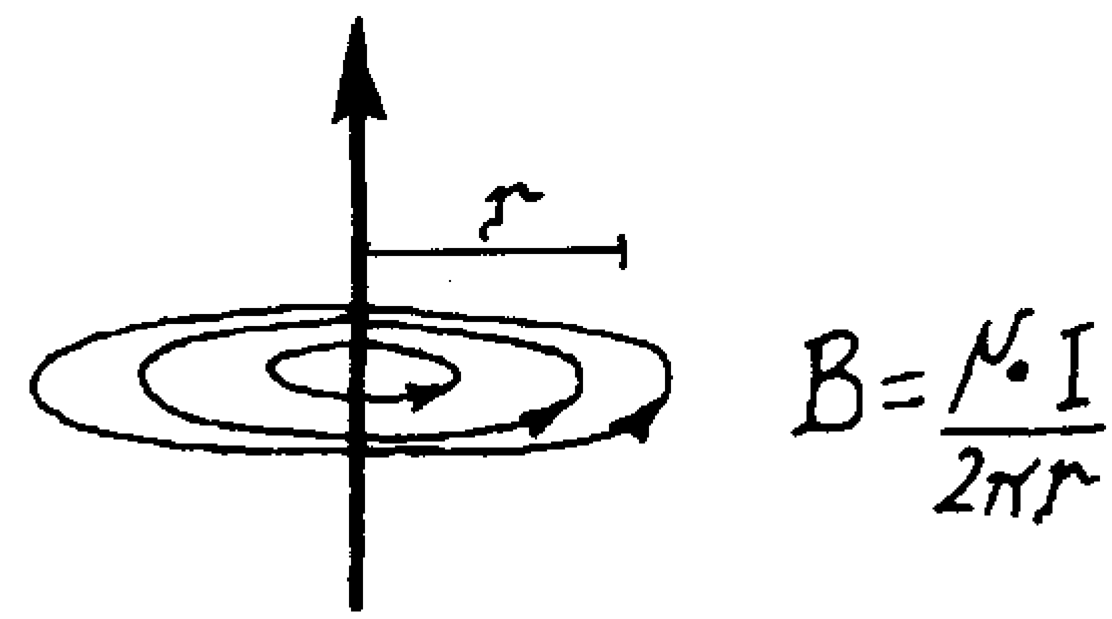
一个点电荷 Q 以速度 v 移动时，会产生磁场. 若与 Q 电荷距离为 r 的一点 P，它与 Q 运动方向之间的夹角为 θ，则依毕奥－萨伐尔定律（Biot-Savart law），磁场强度为

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Qv\sin\theta}{r^2},$$

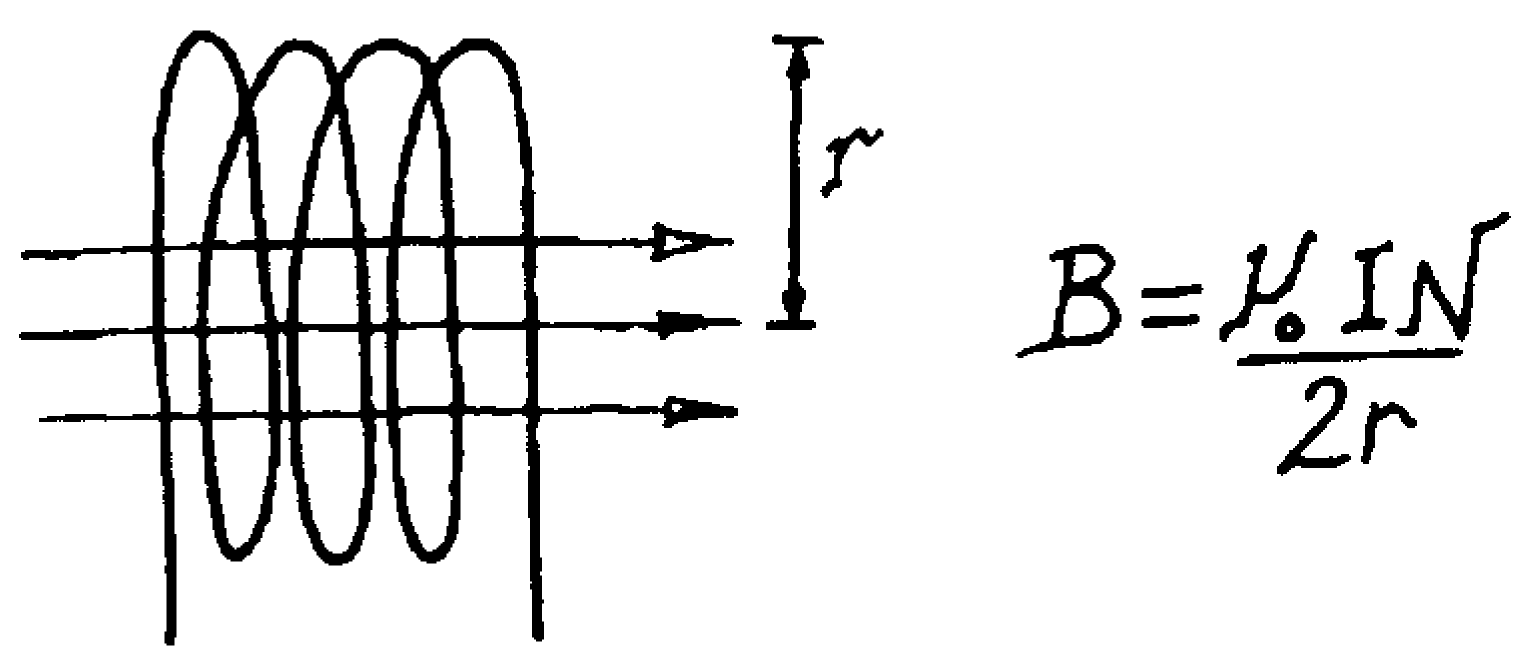
而 B 的方向见图 24a.



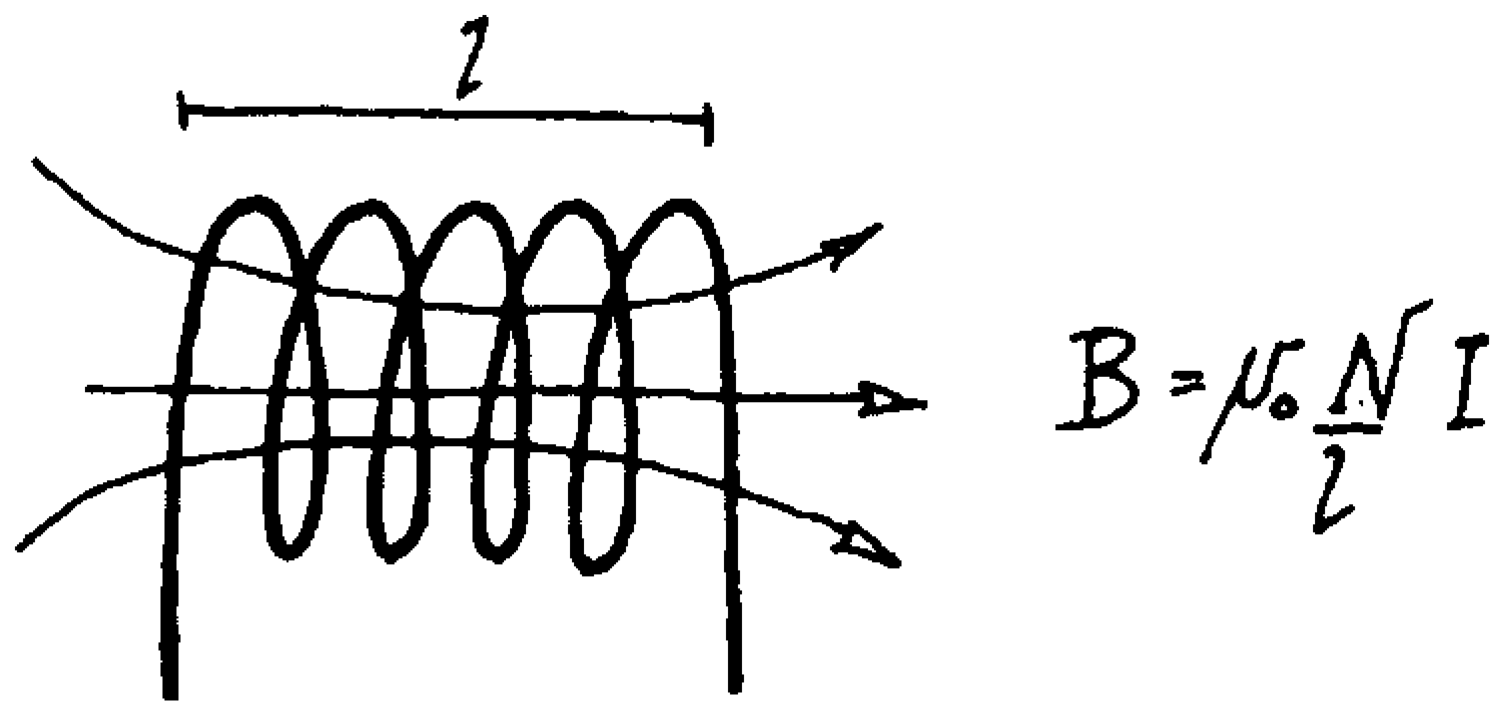
电流方向是正电荷移动的方向



距离导线r的磁场强度



半径为r、绕N圈的线圈



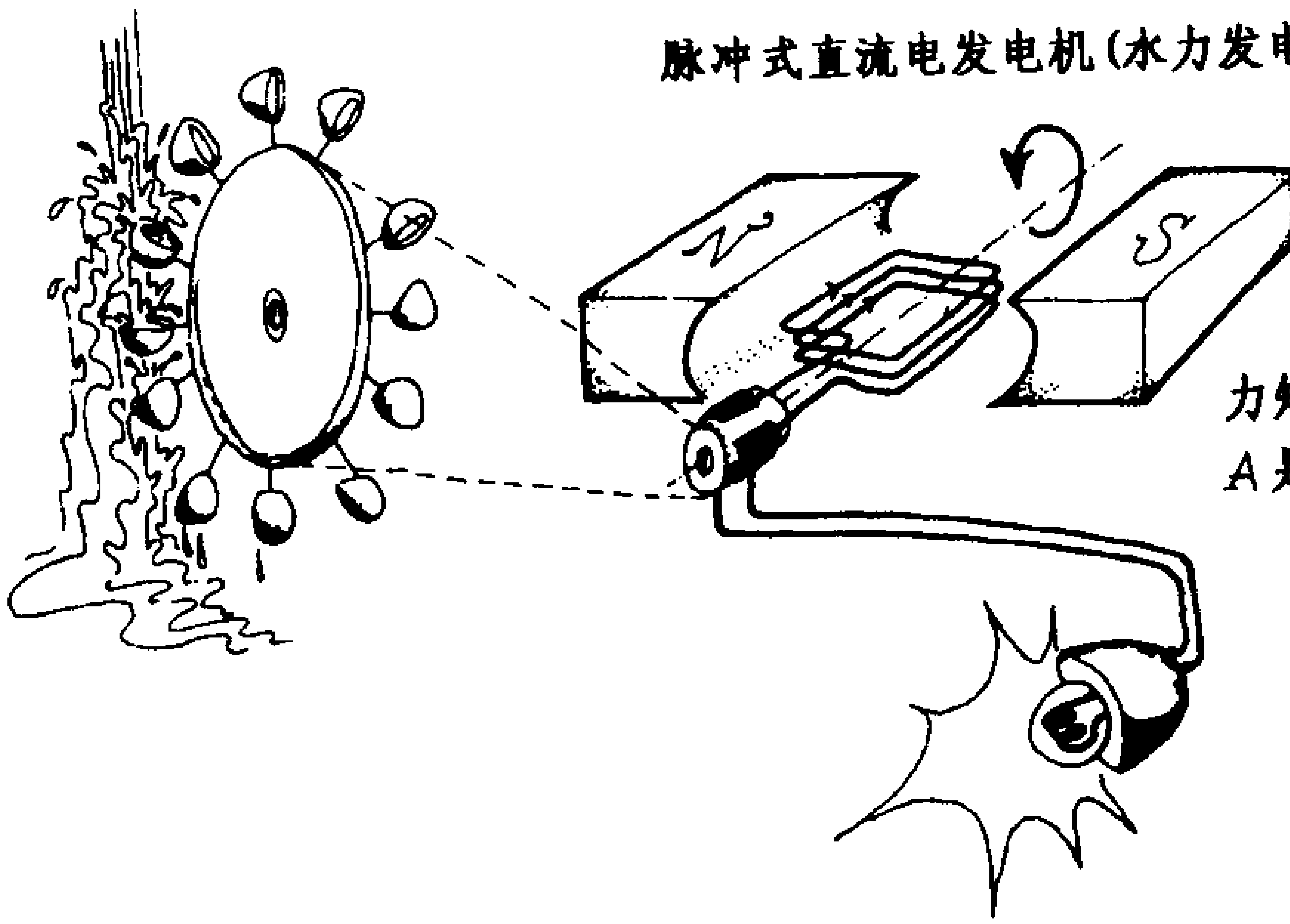
长度为l、绕N圈的螺旋线圈

在前页图里还绘出了其他的磁场情况. 注意，μ_0 是真空磁导率（permeability of vacuum），是磁学里的常数（见附录）.

运动中的磁场会产生电场，反之亦然，运动中的电荷也会产生磁场. 利用磁铁与带电流的线圈，电能可以转换成机械能（电动机），反之亦然，机械能也可以转换成电能（发电机）.

夫莱明（Sir John Ambrose Fleming，1849 ~ 1945，英国物理学家、电机工程师）左手、右手定则的应用，分别表示于右页下图中.

脉冲式直流电发电机(水力发电)



力矩 = ABIN
A是线圈面积

拇指=力(运动, Motion)
食指=磁通密度(field)
中指=电流(current)

右手: 发电机　　　　左手: 电动机

微积分

微积分利用无穷小与极限来解决两种问题——函数的即时变化率以及曲线下的精确面积.

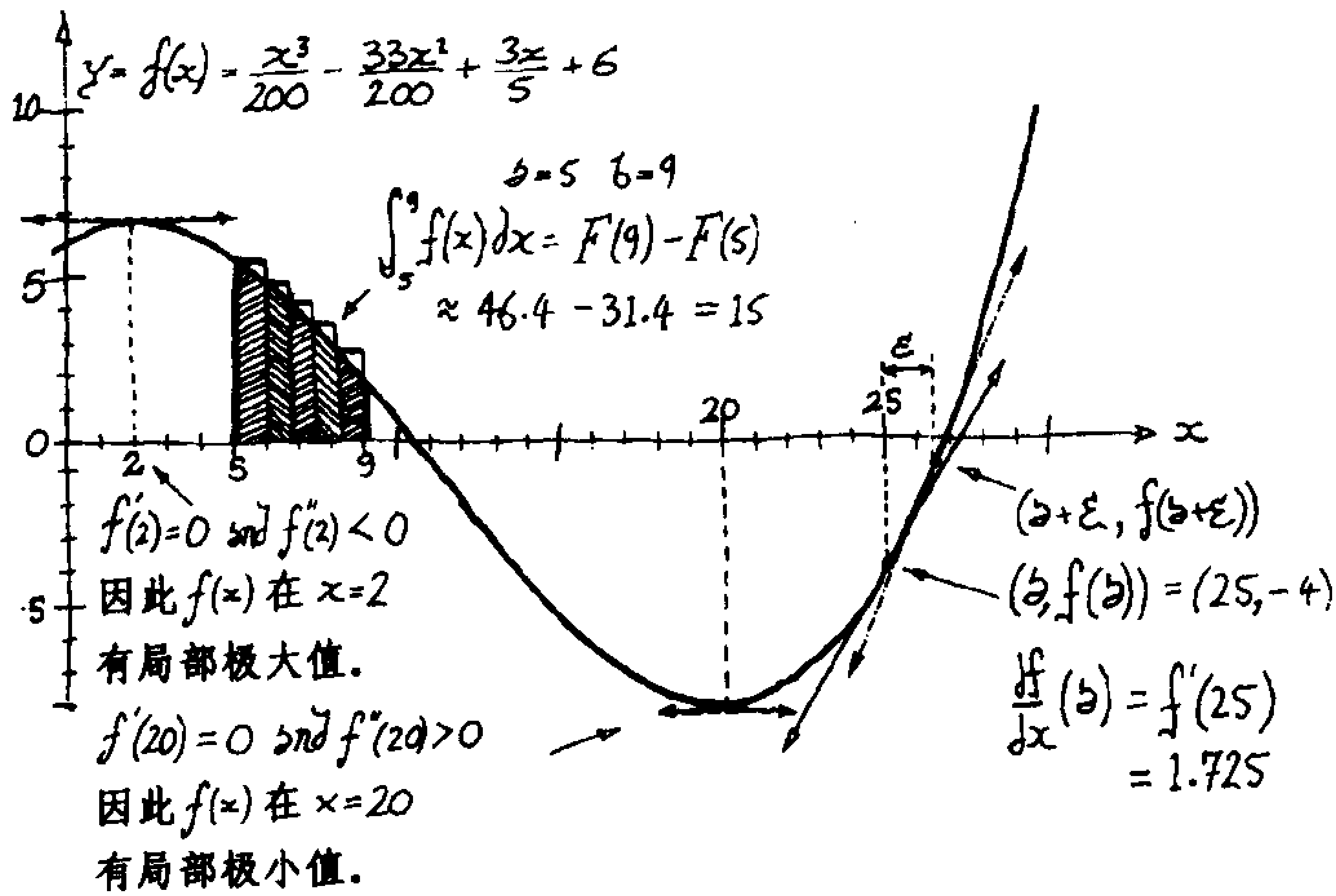
函数 $y=f(x)$ 的图形在 $(a,f(a))$ 的点上有个斜率 $f'(a)$，而函数 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 就称为 f 的导函数（derivative）. 对每一个 x 而言，$f'(x)$ 是 f 在 x 这点的变化率. 要直接计算出 f 在 a 点的微分值，我们来看看通过 $(a,f(a))$ 及 $(a+\varepsilon, f(a+\varepsilon))$ 这两点的直线的斜率，其中 ε 是个无穷小的量. 若斜率趋近一个极限值，且极限值存在，则 f 在 a 点的变化率就可以定义为这个极限值.

若 $x(t)$ 是一个物体在时间 t 的位置，则它在 t 时的速度 $v(t)$ 就是

$$x'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t).$$

它的加速度 $a(t)$，则是速度 v 在 t 时的变化率：

$$x''(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t).$$



微分产生导函数：

$$f(x) = \frac{x^3}{200} - \frac{33x^2}{200} + \frac{3x}{5} + 6$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{3x^2}{200} - \frac{33x}{100} + \frac{3}{5}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{3x}{100} - \frac{33}{100}$$

积分产生原函数：

$$F(x) = \frac{x^4}{800} - \frac{11x^3}{200} + \frac{3x^2}{10} + 6x + c$$

满足 $F'(x) = f(x)$

假设我们有个函数（见前页），想求出 a、b 之间曲线下的面积，则可以把 a、b 之间分成无限多份相等宽度的长条，使得每份看起来都像个长方形，如此每份区块的面积便很容易可以求得，然后只要把它们相加起来就是面积了.

曲线下的面积，就是长方条总和的极限值，可写成

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 $F(x)$能满足 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 就是 $F(b)-F(a)$，$F(x)$称为$f(x)$的不定积分（indefinite integral）或原函数（primitive function），写成

$$\int f\,dx.$$

由于$(F(x)+c)'=F'(x)$，故下页所有的原函数都包含一个任意常数.

$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$
$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$
$\int f \frac{dg}{dx} dx = fg - \int g \frac{df}{dx} dx$
integration by parts
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$
$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}$
$\frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$
$\frac{d}{dx} C = 0$ for constant c
$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$
$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$
$\frac{d}{dx} \log_e ax = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx} \tan ax = a \sec^2 ax$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\int \log x \, dx = x \log x - x$
$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$
$\int e^x dx = e^x$
$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$
$\int \cos x \, dx = \sin x$
$\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$
$\int \sin x \, dx = -\cos x$
$\int \cot x \, dx = \log \sin x$
$\int \tan x \, dx = -\log \cos x$

复数——进入虚数王国

我们熟悉的实数（real number）其实是包含在另一个更大范围的复数（complex number）王国里. 复数包含了虚数单位 i，它的定义如下；

$$i^2=-1 \text{ 或 } i=\sqrt{-1}.$$

已知任何两个实数 a 与 b，则 $a+bi$ 就称为复数.

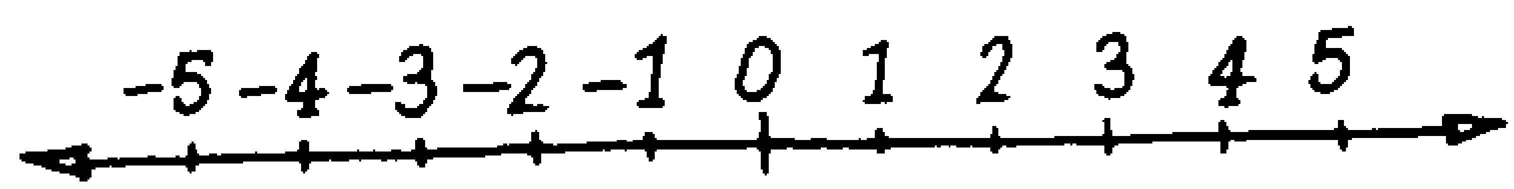
$a+bi=c+di$ 当且仅当 $a=c$ 与 $b=d$.

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

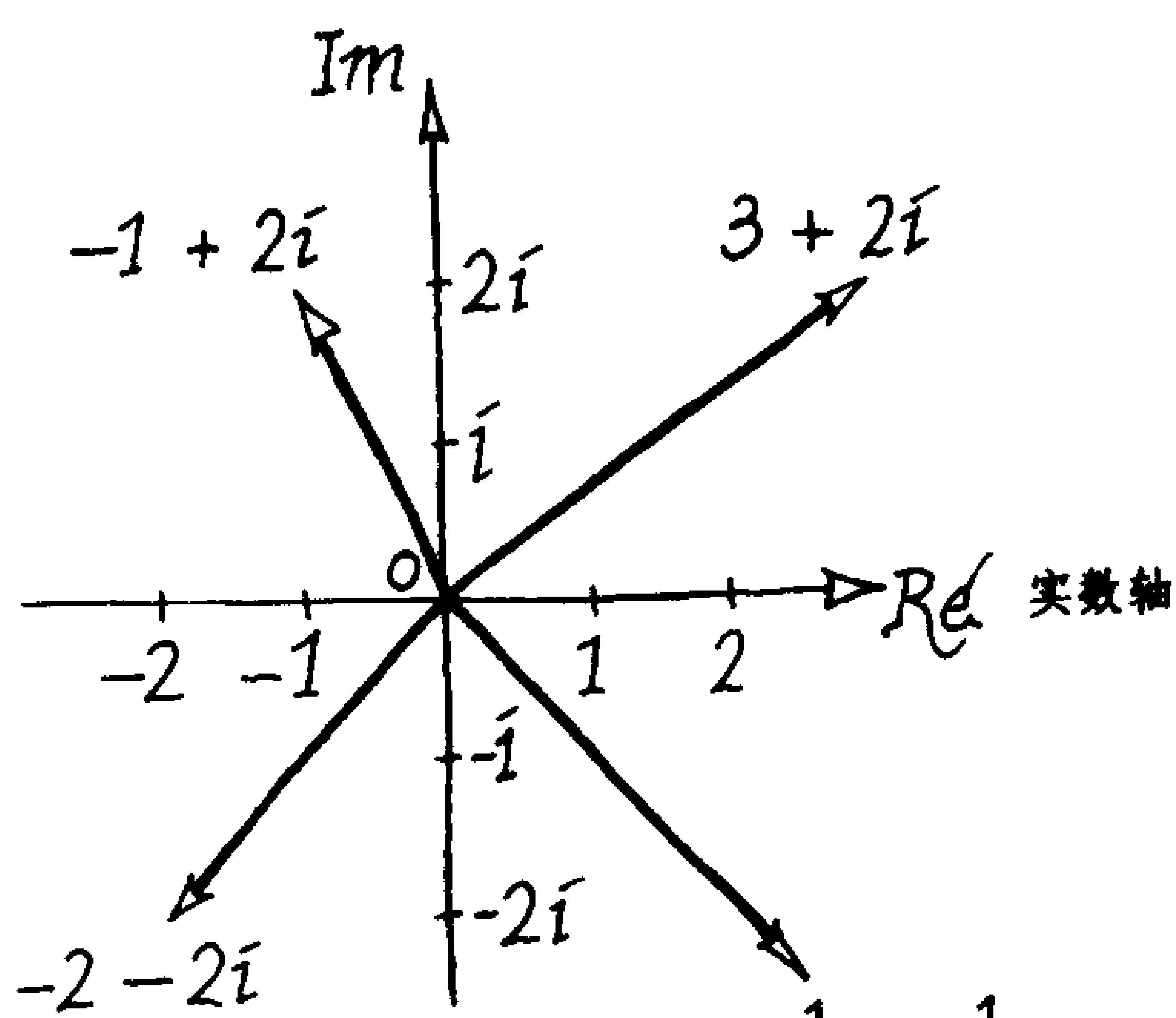
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

在复数平面里（右页图），实数轴（Re）变成 x、y 坐标平面的 x 轴，虚数轴（Im）则是 y 轴. 复数平面上的每一点都对应一个复数，反之亦然. 在虚轴上的数称为纯虚数，它的实数部分是 0.



实数不仅包含所有的正负整数，还包含所有的正负分数与无理数，如$\sqrt{2}$与 π 等.



极坐标（polar representation）利用的是角度 θ 与半径 r:

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

使用欧拉方程（Euler's equation），指数函数 e^x 可以延伸为复数平面:

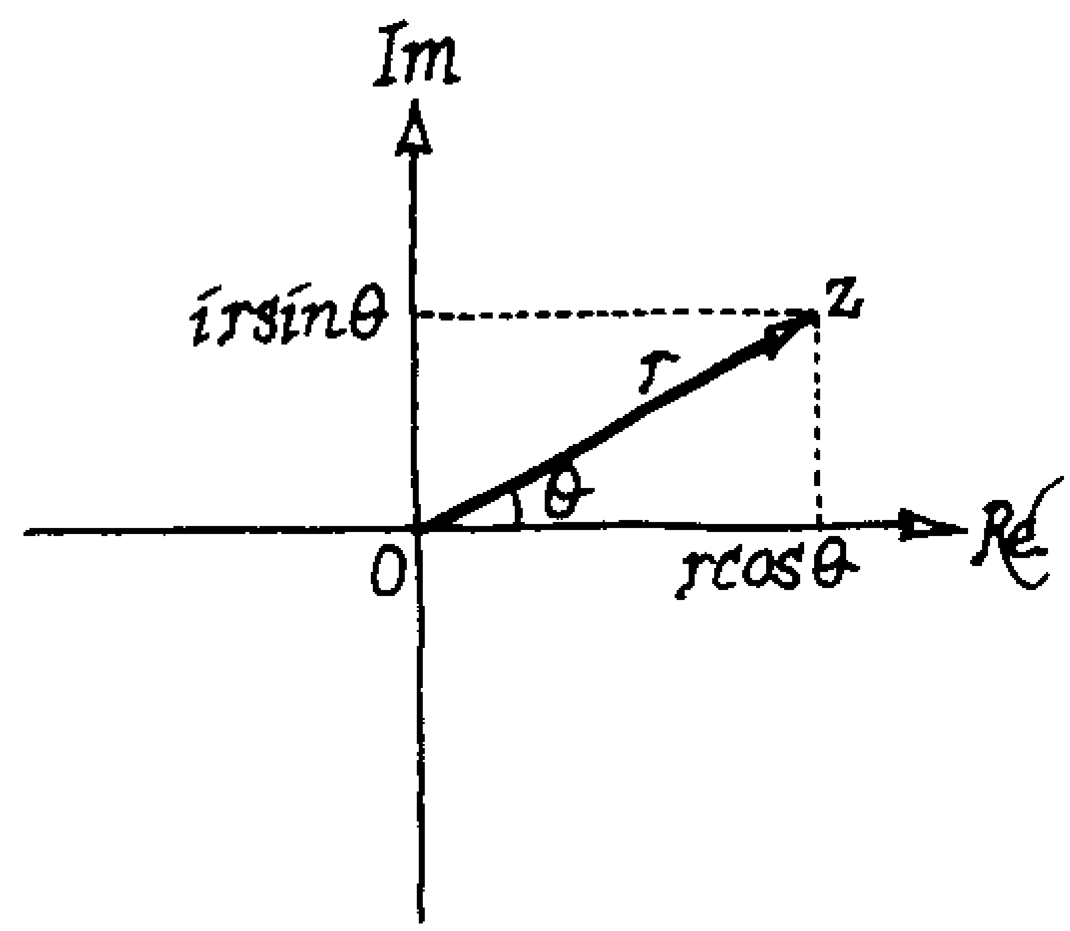
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

从上面的公式，我们得到了一个很重要的数学关系，

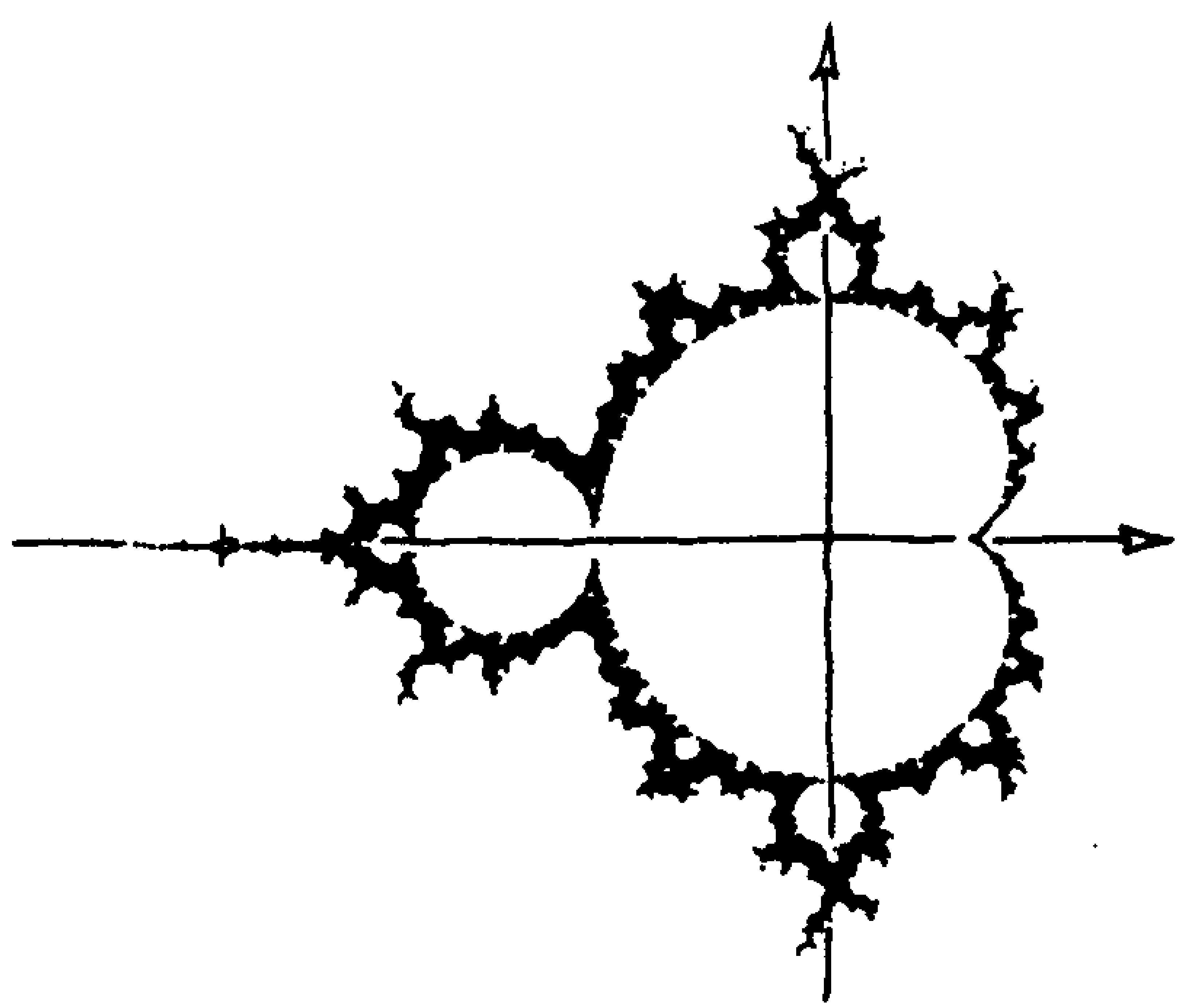
$$e^{i\pi} = -1.$$

以及关于复数 z 乘方的棣莫弗定理（De Moivre Theorem）:

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n = \\ & r^n e^{in\theta} = \\ & r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \end{aligned}$$



复数的极坐标表示法



复数平面是很多著名的分形芒德布罗集（Mandelbrot set）的基础，它能利用重复的图形积分（$z \to z^2 + c$）产生.

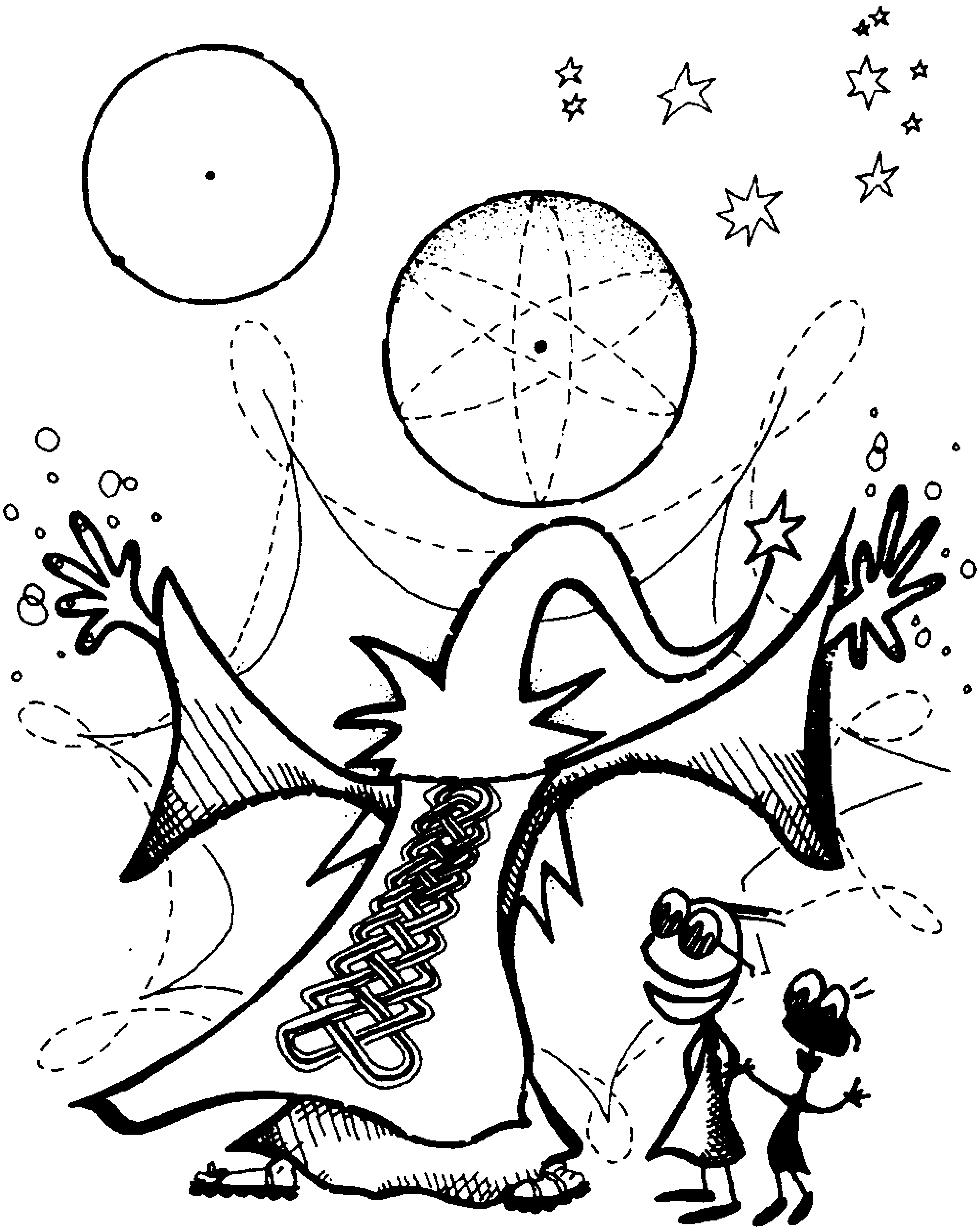
更高维度

许多二维的几何图形可以用类比的方式伸展至三维，圆与球就是很好的例子（见第16页）. 虽然我们的视觉囿限于三维空间，我们依然可用相同的方式，继续扩大到四维、五维或更高维度的“超球体” （hypersphere）. 一般而言，一个 n 维的空间是由一组点组成，坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 我们可用类比的方式来定义更高维度的距离、角度和其他的量.

爱因斯坦以四维空间来模拟时空宇宙的物理学，而现今的宇宙学家在某些特殊应用上，常用到10维或更高的维度. 不过要注意，n 维空间的定义和研究，不一定需要用上我们对物质空间、时间甚至任何经验论来解释.

在研究 n 维空间时，有些整数 n 所构成的空间具有相当独特的几何性质. 一个简单的例子是，只有三维空间能支持“纽结”（knot）；在其他维度的空间里，纽结都可以“解开”. 同样的，只有四维空间允许异常微分结构（exotic differential structure）如此稀奇的拓扑学结构存在.

但那是另一则故事了.



附　录

词　　汇

$>$ 大于	$\geqslant$ 大于等于	$\neq$ 不等于
$<$ 小于	$\leqslant$ 小于等于	$\approx$ 约等于

a 与 b 相乘可写成 $a \times b$ 或 $a \cdot b$，也可简写成 ab.

除法可写成$\frac{a}{b}$或 a/b，一般不用 $a \div b$.

负数：$(-a)+b=b-a$，$(-a)+(-b)=-(a+b)$.

$(-a)b=a(-b)=-ab$，$(-a)(-b)=ab$.

a 的指数，定义如 $a^3=a \times a \times a$ 的形式，以此类推. 负数与分数的指数也有定义，如 $x^{-2}=1/x^2$，而 $x^{1/2}=\sqrt{x}$；最后这一项称为 x 的方根，满足 $(\sqrt{x})^2=x$.

力　物体之间的相互作用，通常能使物体获得加速度或发生形变.

反三角函数　包括反正弦、反余弦、反正切（写成 arcsin，arccos，arctem)，定义为当 $\sin\theta=x$ 时，$\arcsin x=\theta$，其他反函数类同.

加速度 物体每单位时间内速度的变化量，单位是 m/s^2 .

四边形 是个封闭的、四条边的平面图形.

平行四边形 对边两两平行的四边形.

平衡 是一种全部的力都互相抵消掉的稳定状态.

多边形 封闭、平面的多边图形. 正多边形每边的边长都相等，每个内角也相等.

角速度 单位时间内角度的变化量.

函数 f 在定义范围内，每个数 x 的函数值为 $f(x)$.

函数图像 对函数 f 而言，在坐标平面上画出 $(x, f(x))$ 所形成的图.

弧 圆周的一部分，以度或弧度为单位.

弧度 几何上重要的角度单位，是利用所对应的圆周来度量角度. 1 弧度约等于 $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \approx 57.296^{\circ}$.

波 能量借由介质或场来传递的现象，前者如水波、声波，后者如电磁波.

度 是一种测量角大小的单位，1 度等于圆周的 $\frac{1}{360}$.

恒等式 方程式的另一种称呼.

常量 某一固定值. 物理常量与选用的单位有关，数学常量如 e 与 π，则与单位无关.

张力 张力及其相反的力——压缩力，都以力来度量.

斜率 一条线之倾斜度的正负度量值，即垂直方向的位移除以水平方向的位移. 水平线的斜率是零，而垂直线的斜率无法定义.

梯形 只有一组对边互相平行的四边形.

速度 物体在单位时间内走的距离，也就是特别包含方向的速率.

单位 指可度量数量标准化后的量. 单位的使用要注意一致性，倘若加速度用的单位是米/秒^2（m/s^2），则所有的距离都要用米为单位，时间也要用秒来计算.

场 是一种空间的范围，并受到了某种可度量性质的影响. 场的每一点都有个值（有时还有方向）.

周期 振荡或振动现象的周期指的是运动完成一周所需要的时间.

电阻 一种电子元件，用来限制电流.

电流 流过导体的带电电荷流束.

电容器 一种能储存电荷的电子元件.

电荷 能使物质表现出带电现象. 电荷可正可负，单位是库仑.

电感器 一种将电流转变成磁力的线圈.

电压 会产生电流的电动势（electromotive force）.

线性关系 在 x 与 y 两个数量间，存在有 $y = ax + b$ 的

关系.

质量 用来度量物体的“物质含量”，是物质的一种属性.

频率 周期现象中的频率指的是单位时间内完成振动或振荡的次数或周数. 它是周期的倒数.

压强 每单位面积上的力，以帕斯卡（Pa）为单位.

变量 用来代表可变的量或未知的量的符号.

常　　量

数学常量

$\pi = 3.14159265358979\cdots$

$e = 2.718281828459045\cdots$

$\sqrt{2} = 1.414213562373095\cdots$

$\sqrt{\pi} = 1.7724538500905516\cdots$

物理常量

真空中的光速	c	2.997925×10^{8} m s^{-1}
真空的磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1}
介电常量	ε_0	8.8542×10^{-12} F m^{-1}
质子的质量	m_p	1.6726×10^{-27} kg
中子的质量	m_n	1.6749×10^{-27} kg
电子的质量	m_e	9.1094×10^{-31} kg
电子或质子的电荷	e	1.6022×10^{-19} C
0℃干空气的声速	c	331.45m s^{-1}
20℃水的声速		1470m s^{-1}
万有引力常量	G	6.6726×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
地球重力加速度	g	9.80665 m s^{-2}

阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022169\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	k	$1.381\times10^{-23}\,\mathrm{JK}^{-1}$
普朗克常量	h	$6.6022\times10^{-34}\,\mathrm{Js}$
斯特藩－玻尔兹曼常量	σ	$5.670\times10^{-8}\,\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$

展开式与其他……

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$，因此 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$.

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}} \qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}} \qquad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$.

$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$.

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \cfrac{13^2}{6 + \cfrac{15^2}{6 + \cdots}}}}}}}}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots \quad (弧度).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

(x 以弧度为单位)

泰勒展开式（Taylor expansion）:

$$f(x) = f(x-a) + af'(x-a) + \frac{a^2}{2!}f''(x-a) + \frac{a^3}{3!}f'''(x-a) + \cdots.$$

麦克劳林展开式（Maclaurin expansion）:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots.$$

分数公式:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd},\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

"$\tan\frac{1}{2}\theta$" 公式:

若 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，则 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$.

黎曼函数: "尽管看似简单，但对近代数学家而言，却可能是最具挑战性、也最神秘的目标." （M. C.

Gutzwiller)

$$\zeta(x)=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots=$$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^x}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}\right)\cdots\ (x>1),$$

p_k 是第 k 个素数.